

経路積分

TKG

2025 年 3 月 5 日

目次

1	INTRODUCTION	2
2	これまでの簡単なまとめ	2
2.1	フーリエ変換	2
3	復習	2
3.1	シュレディンガー表示	2
3.2	ハイゼンベルグ表示	3
3.3	Dirac 表示 (interaction 表示)	3
4	汎関数積分	4
5	調和振動子系	7
5.1	生成消滅演算子	7
5.2	具体的な計算	9
5.3	コヒーレント状態での 1 の分割	10
5.4	汎関数積分表示	11
6	ガウス積分の一般的性質	11
6.1	ガウス積分	11
6.2	ガウス積分の諸性質	13
6.3	有効ポテンシャル	14
6.4	ルジャンドル変換	15
6.5	真空期待値を持つ場合	16
6.6	古典解周りの量子補正	16
6.7	一般的な相互作用の場合	17
7	いくつかの量子力学での例	18
7.1	汎関数積分を q のみの積分に変えること	18
7.2	調和振動子	18
7.3	自由粒子の場合	19
7.4	一般的な場合における WKB 近似での例	20

8	フェルミオン	21
8.1	フェルミオンの調和振動子	21
8.2	グラスマン数	21
8.3	フェルミオンのコヒーレント状態	24

1 INTRODUCTION

場の理論を量子力学的に扱うときに必要になる概念である経路積分についてのトピックを簡潔にまとめました。

2 これまでの簡単なまとめ

2.1 フーリエ変換

まず複素関数のフーリエ変換の notation。

(1) $\mathbb{R}^n$ 上の関数のフーリエ変換は、以下の図式で変換出来る。

$$x - \text{space} \begin{array}{c} \xrightarrow{\int d^n \mathbf{x} e^{-i p x} *} \\ \xleftarrow{\int \frac{d^n \mathbf{p}}{(2\pi)^n} e^{i p x} *} \end{array} p - \text{space}$$

(2) $x \in [0, L]$ の場合は、

$$x - \text{space} \begin{array}{c} \xrightarrow{\sqrt{\frac{1}{L}} \int_0^L dx \exp(-i \frac{2\pi n}{L} x) *} \\ \xleftarrow{\sqrt{\frac{1}{L}} \sum_n \exp(i \frac{2\pi n}{L} x) *} \end{array} p - \text{space}$$

など。

3 復習

3.1 シュレディンガー表示

状態ベクトルと作用素は

$$\begin{aligned} \cdot |\varphi\rangle_s &= U_t |\varphi_0\rangle_s \\ \cdot A & \text{ (operator)} \end{aligned}$$

運動方程式 (シュレディンガー方程式) は

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_t = H U_t$$

H が t によれば、初期時刻 t_0 にも依存して

$$\begin{aligned} U_{t \leftarrow t_0} &= 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_2) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 T(H(t_1)) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} dt_1 dt_2 T(H(t_1)H(t_2)) + \cdots \\ &=: T \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) \right]. \end{aligned}$$

ここに T は時間順序積を表す。これは任意の t_0, t_1, t に対し

$$U_{t \leftarrow t_0} = U_{t \leftarrow t_1} U_{t_1 \leftarrow t_0}$$

を満たす。

作用素 A の、状態 $|\varphi_t\rangle_s$ での平均値 $\langle A \rangle$ は

$$\langle A \rangle = {}_s \langle \varphi_t | A | \varphi_t \rangle_s.$$

3.2 ハイゼンベルグ表示

状態ベクトルと作用素は

$$\begin{aligned} \cdot |\varphi\rangle_H &= |\varphi_0\rangle_s \\ \cdot A(t) &= U_t^\dagger A U_t. \end{aligned}$$

運動方程式（ハイゼンベルグ方程式）は

$$i\hbar \frac{d}{dt} A(t) = [A(t), H]$$

作用素 A の平均値 $\langle A \rangle$ は

$$\langle A \rangle = {}_H \langle \varphi | A(t) | \varphi \rangle_H$$

これはシュレディンガー描像の時の平均値と一致する。

3.3 Dirac 表示（interaction 表示）

ハミルトニアン $H = H_0 + V$ とし、 V を摂動項として扱う。状態ベクトルと作用素は

$$\begin{aligned} \cdot |\varphi_t\rangle_I &= e^{-\frac{H_0}{i\hbar}t} U_t |\varphi\rangle_H \\ &= e^{-\frac{H_0}{i\hbar}t} |\varphi_t\rangle_s. \\ \cdot A^*(t) &= e^{-\frac{H_0}{i\hbar}t} A e^{\frac{H_0}{i\hbar}t}. \end{aligned}$$

この表示では時間発展作用素は

$$U_{t \leftarrow t_0}^* = e^{-\frac{H_0}{i\hbar}t} U_{t \leftarrow t_0} e^{\frac{H_0}{i\hbar}t_0}$$

で、運動方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_{t \leftarrow t_0}^* = V^*(t) U_{t \leftarrow t_0}^*$$

ここで

$$V^*(t) = e^{-\frac{H_0}{i\hbar}t} V e^{\frac{H_0}{i\hbar}t}.$$

よって時間発展作用素は

$$U_{t \leftarrow t_0}^* = T \exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V^*(t_1) \right).$$

4 汎関数積分

時刻 $t_0 \rightarrow t$ の時間発展演算子を $U_{t \leftarrow t_0}$ として（以下では基本的にハイゼンベルグ表示。 H は省略して書いている。ただし $|q_0\rangle$ に関しては $|q_0, t_0\rangle = |q_0\rangle$ と書いた。）

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle := \langle q | U_{t \leftarrow t_0} | q_0 \rangle.$$

ここで時間発展作用素が

$$U_{t \leftarrow t_0} = U_{t \leftarrow t_N} U_{t_N \leftarrow t_{N-1}} \cdots U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} U_{t_i \leftarrow t_{i-1}} \cdots U_{t_1 \leftarrow t_0}$$

と書けること、及び

$$1 = \int |q_i\rangle dq^i \langle q_i|$$

を使って

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \langle q | U_{t \leftarrow t_N} \int |q_N\rangle dq_N \langle q_N | U_{t_N \leftarrow t_{N-1}} \int |q_{N-1}\rangle dq_{N-1} \langle q_{N-1} | \cdots \\ &\quad \cdots \int |q_{i+1}\rangle dq_{i+1} \langle q_{i+1} | U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} \int |q_i\rangle dq_i \langle q_i | \cdots \\ &\quad \cdots U_{t_1 \leftarrow t_0} \int |q_1\rangle dq_1 \langle q_1 | U_{t_1 \leftarrow t_0} | q_0 \rangle \end{aligned}$$

ここで各 i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$) に対し ($q_{N+1} = q$ として)

$$\langle q_{i+1} | U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} | q_i \rangle = \int \langle q_{i+1} | U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} | p_i \rangle dp_i \langle p_i | q_i \rangle.$$

と書けること、また

$$\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$$

が十分小さいとして

$$U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} \approx e^{\frac{H(t_i)}{i\hbar} \Delta t_i}$$

と書けることから（ハミルトニアンの中の q と p の順序を q が全て p の左側にくるように並べるなどして）

$$\langle q_{i+1} | U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} | p_i \rangle \approx e^{\frac{H(t_i)}{i\hbar} \Delta t_i} \langle q_{i+1} | p_i \rangle$$

となり、従って

$$\langle p | q \rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{pq}{i\hbar}\right)$$

より

$$\langle q_{i+1} | U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} | q_i \rangle = \int \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{1}{i\hbar} [p_i(q_{i+1} - q_i) - H(t_i)\Delta t_i]\right]$$

従って

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int dq_1 \cdots dq_N \left[\prod_{i=0}^N \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{i\hbar} \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(p_i \frac{\Delta q_i}{\Delta t_i} - H(t_i)\right)\right].$$

ここに $\Delta q_i := q_{i+1} - q_i$.

$N \rightarrow \infty$ を取り、その時測度

$$\lim_{N \rightarrow \infty} dq_1 \cdots dq_N \left[\prod_{i=0}^N \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \right] =: [dq][dp]$$

と書けば

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int [dq][dp] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \left(p(t_1) \dot{q}(t_1) - H(q(t_1), p(t_1), t_1) \right) \right] \\ &= \int [dq][dp] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 L(q(t_1), p(t_1), t_1) \right] \end{aligned}$$

ここで測度 $[dq][dp]$ が

$$dq_1 \cdots dq_{i-1} \left[\prod_{j=0}^{i-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \right] \cdot dq_i \cdot dq_{i+1} \cdots dq_N \left[\prod_{j=i}^N \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \right]$$

となるので

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int \langle q, t | q_i, t_i \rangle dq_i \langle q_i, t_i | q_0, t_0 \rangle$$

の関係と矛盾しない。

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \langle q | U_{t \leftarrow t_i} U_{t_i \leftarrow t_0} | q_0 \rangle$$

と分けられることから、間に q を入れて（ハイゼンベルグ表示で）

$$\begin{aligned} \langle q, t | q(t_i) | q_0, t_0 \rangle &:= \langle q | U_{t \leftarrow t_i} q U_{t_i \leftarrow t_0} | q_0 \rangle \\ &= \int \langle q, t | q_i, t_i \rangle q_i dq_i \langle q_i, t_i | q_0, t_0 \rangle \\ &= \int [dq][dp] q(t_i) \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 L(q(t_1), p(t_1), t_1) \right] \end{aligned}$$

と書ける。そこで今、ハミルトニアンが外場 $f(t)$ を（ f はただの関数）

$$H = H_0 - qf(t)$$

のように含んでいるとすると、ラグランジアンは

$$L = L_0 + qf(t)$$

となり

$$\langle q, t | q(t_i) | q_0, t_0 \rangle = -i\hbar \frac{\delta}{\delta f(t_i)} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle$$

と書ける。同様にして $t = t_i, t_j$ ($t > t_i > t_j > t_0$) で汎関数微分して

$$\begin{aligned} \left[-i\hbar \frac{\delta}{\delta f(t_i)} \right] \left[-i\hbar \frac{\delta}{\delta f(t_j)} \right] \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int [dq][dp] q(t_i) q(t_j) \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t L \right] \\ &= \iint \langle q, t | q_i, t_i \rangle q_i dq_i \langle q_i, t_i | q_j, t_j \rangle q_j dq_j \langle q_j, t_j | q_0, t_0 \rangle \\ &= \langle q | U_{t \leftarrow t_i} q U_{t_i \leftarrow t_j} q U_{t_j \leftarrow t_0} | q_0 \rangle \\ &:= \langle q, t | q(t_i) q(t_j) | q_0, t_0 \rangle \end{aligned}$$

上の式で $t_j > t_i$ であれば、 $q(t_i)$ と $q(t_j)$ の順が逆になって出てくる。即ち一般に

$$\left[-i\hbar \frac{\delta}{\delta f(t_j)} \right] \left[-i\hbar \frac{\delta}{\delta f(t_i)} \right] \langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \langle q, t | T(q(t_i)q(t_j)) | q_0, t_0 \rangle$$

さらに一般に

$$\begin{aligned} & \left[-i\hbar \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \right] \left[-i\hbar \frac{\delta}{\delta f(t_2)} \right] \cdots \left[-i\hbar \frac{\delta}{\delta f(t_i)} \right] \cdots \langle q, t | q_0, t_0 \rangle \\ &= \int [dq][dp] q(t_1)q(t_2) \cdots q(t_i) \cdots \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t L \right] \\ &= \langle q, t | T(q(t_1)q(t_2) \cdots q(t_i) \cdots) | q_0, t_0 \rangle \end{aligned}$$

ほとんど同様にして

$$\begin{aligned} \langle q, t | p(t_i) | q_0, t_0 \rangle &= \langle q | U_{t \leftarrow t_i} p U_{t_i \leftarrow t_0} | q_0 \rangle \\ &= \int \langle q, t | p_i, t_i \rangle p_i dp_i \langle p_i, t_i | q_0, t_0 \rangle \\ &= \int dq_i dq_j dp_i \langle q, t | q_j, t_j \rangle \langle q_j, t_j | p_i, t_i \rangle p_i \langle p_i, t_i | q_i, t_i \rangle \langle q_i, t_i | q_0, t_0 \rangle \\ &= \int dq_j dq_i \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \langle q, t | q_j, t_j \rangle \exp [-i\hbar p_i(q_j - q_i) - H(t_i)\Delta t_i] p_i \langle q_i, t_i | q_0, t_0 \rangle \\ &= \int [dq][dp] p(t_i) \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 L(q(t_1), p(t_1), t_1) \right]. \end{aligned}$$

となる。最後の等式は、測度が

$$[dq][dp] = dq_1 \cdots dq_{i-1} \left[\prod_{n=0}^{i-1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] dq_i dq_j \frac{dp_i}{2\pi\hbar} dq_{j+1} \cdots dq_N \left[\prod_{m=j}^N \frac{dp_m}{2\pi\hbar} \right]$$

のように対応していることから分かる。従って一般には q と p の関数 $F(q, p)$ に対し

$$\langle q, t | T F(q, p) | q_0, t_0 \rangle = \int [dq][dp] F(q, p) \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t L \right]$$

となるのが分かる。従って

$$F(q, p) = \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 f(t_1) q(t_1) \right]$$

とすると

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int [dq][dp] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int L \right] \\ &= \int [dq][dp] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int [L_0 + qf] \right] \\ &= \langle q, t | T \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 f(t_1) q(t_1) \right] | q_0, t_0 \rangle^{(0)} \end{aligned}$$

最後の式の $^{(0)}$ は、そのラグランジアンが外場のないラグランジアン L_0 で定義された場合の状態ベクトルであることを

意味している。これはまさに Dirac 表示である。実際

$$\begin{aligned}
 \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \langle q | U_{t \leftarrow t_0} | q_0 \rangle \\
 &= \langle q | e^{\frac{H_0}{i\hbar} t} e^{-\frac{H_0}{i\hbar} t_0} U_{t \leftarrow t_0} e^{\frac{H_0}{i\hbar} t_0} e^{-\frac{H_0}{i\hbar} t_0} | q_0 \rangle \\
 &= {}_I \langle q, t | U_{t \leftarrow t_0}^* | q_0, t_0 \rangle_I \\
 &= \langle q, t | T \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t f q^* \right] | q_0, t_0 \rangle^{(0)}
 \end{aligned}$$

5 調和振動子系

5.1 生成消滅演算子

ハミルトニアン

$$H = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2)$$

により記述される系を調和振動子系という。生成消滅演算子を

$$\begin{aligned}
 a &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \\
 a^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)
 \end{aligned}$$

で定義する。交換関係は

$$[a, a^\dagger] = \hbar.$$

H は

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\omega}{2}[aa^\dagger + a^\dagger a] \\
 &= \underbrace{\omega a^\dagger a}_{=: \tilde{H}} + \frac{\hbar\omega}{2}
 \end{aligned}$$

と書ける。真空状態 $|0\rangle$ を

$$\tilde{H}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1$$

なる状態で定義すると、左からも真空状態をかければ

$$a|0\rangle = 0$$

が分かる。

ハイゼンベルグ表示で a の時間発展 $a_t := U_t^\dagger a U_t$ に対し

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} a_t &= U_t^\dagger [a, H] U_t \\
 &= \hbar\omega a_t.
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 a_t &= e^{\frac{\hbar\omega}{i\hbar} t} a. \\
 a_t^\dagger &= e^{-\frac{\hbar\omega}{i\hbar} t} a^\dagger.
 \end{aligned}$$

またコヒーレント状態 $|z\rangle$ を

$$e^{\frac{za^\dagger}{\hbar}}|0\rangle =: |z\rangle$$

で定義すると

$$a|z\rangle = z|z\rangle$$

が分かる¹。同様に

$$\langle 0|e^{\frac{z^*a}{\hbar}} =: \langle z^*|$$

とすると

$$\langle z^*|a^\dagger = z^* \langle z^*|.$$

これらより

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1^*} \langle z_1^*|z_2\rangle &= \frac{z_2}{\hbar} \langle z_1^*|z_2\rangle \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \langle z_1^*|z_2\rangle &= \frac{z_1^*}{\hbar} \langle z_1^*|z_2\rangle\end{aligned}$$

となりよって

$$\langle z_1^*|z_2\rangle = e^{\frac{z_1^*z_2}{\hbar}}$$

が分かる。

ハイゼンベルグ表示で書いて

$$\begin{aligned}\langle z_1^*, t|z_2, 0\rangle &= \langle z_1^*|U_t|z_2\rangle \\ &= \langle 0|U_t U_t^\dagger e^{\frac{z_1^*a}{\hbar}} U_t|z_2\rangle \\ &= \langle 0|U_t e^{\frac{z_1^*a_t}{\hbar}}|z_2\rangle \\ &= \langle 0|U_t \exp\left(\frac{z_1^* e^{\frac{\hbar\omega}{i\hbar}t}}{\hbar} a\right)|z_2\rangle \\ &= \langle z_1^* e^{\frac{\hbar\omega}{i\hbar}t}|z_2\rangle e^{\frac{\omega t}{2i}} \\ &= \exp\left(\frac{z_1^* z_2}{\hbar} e^{\frac{\hbar\omega}{i\hbar}t}\right) e^{\frac{\omega t}{2i}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1^* z_2)^n}{n! \hbar^n} e^{\frac{\hbar\omega n}{i\hbar}t} e^{\frac{\omega t}{2i}}\end{aligned}$$

一方において $|n\rangle$ を H の固有状態でその固有値を H_n と書くと

$$\begin{aligned}\langle z_1^*, t|z_2, 0\rangle &= \sum_n \langle z_1^*|U_t|n\rangle \langle n|z_2\rangle \\ &= \sum_n e^{\frac{H_n}{i\hbar}t} \langle z_1^*|n\rangle \langle n|z_2\rangle\end{aligned}$$

¹

$$a_z := e^{-\frac{za^\dagger}{\hbar}} a e^{\frac{za^\dagger}{\hbar}}$$

とすれば

$$\frac{d}{dz} a_z = 1$$

より分かる。

これらより

$$\begin{aligned} \cdot \langle n|z\rangle &= \frac{z^n}{\sqrt{n!\hbar^n}} \\ \cdot H_n &= \hbar\omega n + \frac{\hbar\omega}{2} \\ &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が分かる。また、

$$\begin{aligned} \langle n|z\rangle &= \langle n|e^{\frac{z a^\dagger}{\hbar}}|0\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!\hbar^m} \langle n|(a^\dagger)^m|0\rangle \end{aligned}$$

従って、 z の冪を見比べて

$$\langle n|(a^\dagger)^m|0\rangle = \delta_{nm}\sqrt{n!\hbar^n}$$

即ち

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!\hbar^n}}|0\rangle$$

が分かる。 a と $a^\dagger$ との交換関係を使えば実際に $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ であることが確認できる。

5.2 具体的な計算

ここで具体的にエネルギー固有解を求めてみる。調和振動子の系なのでハミルトニアン固有状態は束縛状態となる。

$$\langle n|n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq |\phi_n|^2 < \infty \quad (1)$$

$|0\rangle$ は簡単な計算で次で与えられることが分かる。

$$|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (2)$$

となる。ここで係数は規格化の因子であり、ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (3)$$

より従う。従って、

$$|n\rangle = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{(2\hbar)^n n!}} \left(q - \hbar \frac{d}{dq}\right)^n \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (4)$$

が得られる。いくつかを計算すると

$$\cdot |0\rangle = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (5)$$

$$\cdot |1\rangle = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/4} \frac{2q}{\sqrt{2\hbar}} \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (6)$$

$$\cdot |2\rangle = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{8\hbar^2}} (4q^2 - 2\hbar) \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (7)$$

$$\cdot |3\rangle = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{48\hbar^3}} (8q^3 - 12\hbar q) \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (8)$$

$$\cdot |4\rangle = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{(2\hbar)^4 \cdot 4!}} (16q^4 - 48\hbar q^2 + 12\hbar^2) \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (9)$$

$$\cdot |5\rangle = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{(2\hbar)^5 \cdot 5!}} (32q^5 - 160\hbar q^3 + 120\hbar^2 q) \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (10)$$

⋮

が得られる。ここに現れる q の多項式はエルミート多項式である。

5.3 コヒーレント状態での 1 の分割

コヒーレント状態での 1 の分割は

$$1 = \int \frac{dqdp}{2\pi\hbar} |z\rangle e^{-\frac{z^*z}{\hbar}} \langle z^*| \quad (z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip))$$

で与えられる。実際

$$\text{右辺} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(a^\dagger)^n |0\rangle \langle 0| a^m}{n!m!\hbar^n \hbar^m} \int \frac{dqdp}{2\pi\hbar} z^n (z^*)^m e^{-\frac{z^*z}{\hbar}}$$

ここで

$$q = \sqrt{\rho} \cos \theta, \quad p = \sqrt{\rho} \sin \theta \quad (0 < \rho, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ととれば

$$dqdp = d\theta d\rho, \quad z = \sqrt{\rho} e^{i\theta}, \quad z^* = \sqrt{\rho} e^{-i\theta}$$

となり

$$\begin{aligned} \text{積分の部分} &= \int \frac{d\theta d\rho}{2\pi\hbar} \rho^{\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{\rho}{\hbar}} e^{i\theta(n-m)} \\ &= \frac{1}{\hbar} \delta_{nm} \int d\rho \rho^{\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{\rho}{\hbar}} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^\dagger)^n |0\rangle}{\sqrt{n!\hbar^n}} \frac{\langle 0| a^n}{\sqrt{n!\hbar^n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| \\ &= 1. \end{aligned}$$

となる。

5.4 汎関数積分表示

前と同じようにハイゼンベルグ表示で（1 の分割で現れた測度は $\frac{dqdp}{2\pi\hbar} = \frac{dzdz^*}{2\pi i\hbar}$ となる）

$$\begin{aligned}
\langle z^*, t | z_0, t_0 \rangle &= \langle z^* | U_{t \leftarrow t_0} | z_0 \rangle \\
&= \int \langle z^* | U_{t \leftarrow t_N} U_{t_N \leftarrow t_{N-1}} \cdots U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} \cdots U_{t_1 \leftarrow t_0} | z_0 \rangle \\
&= \int \langle z^* | U_{t \leftarrow t_N} | z_N \rangle e^{-\frac{z_N^* z_N}{\hbar}} \frac{dz_N dz_N^*}{2\pi i\hbar} \langle z_N^* | U_{t_N \leftarrow t_{N-1}} | z_{N-1} \rangle e^{-\frac{z_{N-1}^* z_{N-1}}{\hbar}} \frac{dz_{N-1} dz_{N-1}^*}{2\pi i\hbar} \cdots \\
&\quad \cdots \langle z_{i+1}^* | U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} | z_i \rangle e^{-\frac{z_i^* z_i}{\hbar}} \frac{dz_i dz_i^*}{2\pi i\hbar} \langle z_i^* | \cdots \langle z_1^* | U_{t_1 \leftarrow t_0} | z_0 \rangle \\
&= \int \left[\prod_{i=1}^N \langle z_{i+1}^* | U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} | z_i \rangle \exp\left(-\frac{z_i^* z_i}{\hbar}\right) \frac{dz_i dz_i^*}{2\pi i\hbar} \right] \langle z_1^* | U_{t_1 \leftarrow t_0} | z_0 \rangle
\end{aligned}$$

ここで $\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$ と置くと

$$\langle z_{i+1}^* | U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} | z_i \rangle \approx e^{\frac{H_i}{i\hbar} \Delta t_i} e^{\frac{z_{i+1}^* z_i}{\hbar}}. \quad (H_i := H(z_{i+1}^*, z_i, t_i))$$

よって

$$\langle z_{i+1}^* | U_{t_{i+1} \leftarrow t_i} | z_i \rangle e^{-\frac{z_i^* z_i}{\hbar}} = \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \left(-i(z_{i+1}^* - z_i^*)z_i - H_i \Delta t_i \right) \right].$$

また

$$\begin{aligned}
\langle z_1^* | U_{t_1 \leftarrow t_0} | z_0 \rangle &\approx e^{\frac{H_0}{i\hbar} \Delta t_0} e^{\frac{z_1^* z_0}{\hbar}} \\
&= e^{\frac{H_0}{\epsilon\hbar} \Delta t_0} e^{\frac{z_1^* - z_0^*}{\hbar} z_0} e^{\frac{z_0^* z_0}{\hbar}}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\langle z^*, t | z_0, t_0 \rangle &= \int \underbrace{\left[\prod_{i=1}^N \frac{dz_i dz_i^*}{2\pi i\hbar} \right]}_{=: [dz][dz^*]} \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \sum_{i=0}^N \left(-i \frac{\Delta z_i^*}{\Delta t_i} z_i - H_i \right) \Delta t_i \right] e^{\frac{z_0^* z_0}{\hbar}} \\
&\quad (N \rightarrow \infty \text{ で}) \\
&= \int [dz][dz^*] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt \left(-i \frac{dz^*}{dt}(t) z(t) - H(z^*(t), z(t), t) \right) \right] e^{\frac{z_0^* z_0}{\hbar}} \\
&\quad (\text{部分積分して}) \\
&= \int [dz][dz^*] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt \left(i z^*(t) \frac{d}{dt} z(t) - H(z^*(t), z(t), t) \right) \right] e^{\frac{z^*(t) z(t)}{\hbar}}.
\end{aligned}$$

6 ガウス積分の一般的性質

6.1 ガウス積分

場の理論での汎関数積分は主にガウス積分を計算することになる。そこで、ここでガウス積分の性質について少し説明する。ガウス積分

$$I := \int dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n e^{-(\mathbf{x} \cdot M \mathbf{x})}$$

について。ここで M は任意の行列。 M は

$$M = S + A \quad (S : \text{symmetry}, A : \text{antisymmetry})$$

と書ける。 $(\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x})$ は

$$(\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot S\mathbf{x})$$

となる。また $\det M$ について

$$\det M = \det S + \sum_{ij} \frac{\partial \det S}{\partial S_{ij}} A_{ij} + \frac{1}{2!} \sum_{ijkl} \frac{\partial^2 \det S}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} A_{ij} A_{kl} + \cdots$$

よって S が対称なので第 2 項以降は 0 となる。よって

$$\det M = \det S$$

また、 S が対称なので、ある直交行列 P があり

$$P^t S P = O = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

と対角化出来る。 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ と置いて

$$\begin{aligned} I &= \int dy_1 1 \wedge \cdots \wedge dy_n e^{-(\mathbf{y} \cdot O \mathbf{y})} \\ &= \int dy_1 1 \wedge \cdots \wedge dy_n e^{-\sum_i d_i y_i^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \int dy_i e^{-d_i y_i^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{d_i}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^n}{\det M}} \end{aligned}$$

最後の等式は

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n d_i &= \det O \\ &= \det S \\ &= \det M \end{aligned}$$

より従う。

同じようにして複素ガウス積分

$$I := \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{dz_i dz_i^*}{2\pi i} \right] e^{-(\mathbf{z}^* \cdot M \mathbf{z})}$$

(M は対角化可能とする) も計算出来る。

$$U^\dagger M U = O = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

$$U^\dagger U = 1. \quad \mathbf{z} = U \mathbf{w}$$

とすると

$$\begin{aligned} I &= \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{dw_i dw_i^*}{2\pi i} \right] e^{-(\mathbf{w} \cdot O \mathbf{w})} \\ &= \prod_{i=1}^n \int \frac{dq_i dp_i}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} d_i q_i^2 - \frac{1}{2} d_i p_i^2} \quad (w_i = \frac{1}{2}(q_i + ip_i) \text{ と置いた}) \\ &= \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{1}{d_i}} \\ &= \frac{1}{\det O} \\ &= \frac{1}{\det M}. \end{aligned}$$

6.2 ガウス積分の諸性質

$$\begin{aligned} I_0 : &= \int dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x} M \mathbf{x}} \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det M}}. \end{aligned}$$

ここで、あるベクトル $\mathbf{y}$ に対して

$$\begin{aligned} I(\mathbf{y}) &:= \int dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n e^{-(\frac{1}{2} \mathbf{x} M \mathbf{x} - \mathbf{x} \mathbf{y})} \\ &= \int dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n e^{-[\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{y} M^{-1}) M (\mathbf{x} - M^{-1} \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \mathbf{y} M^{-1} \mathbf{y}]} \\ &= I_0 e^{\frac{1}{2} \mathbf{y} M^{-1} \mathbf{y}} \end{aligned}$$

ここで

$$\langle A \rangle := \frac{\int dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n A e^{-(\frac{1}{2} \mathbf{x} M \mathbf{x} - \mathbf{x} \mathbf{y})}}{\int dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n e^{-(\frac{1}{2} \mathbf{x} M \mathbf{x} - \mathbf{x} \mathbf{y})}}$$

この $\mathbf{y} \rightarrow 0$ での極限を $\langle A \rangle_0$ とする。すると

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} \rangle &= \frac{\int dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \mathbf{x} e^{-[\cdots \mathbf{y}]}}{\int dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n e^{-[\cdots \mathbf{y}]}} \\ &= \frac{1}{I(\mathbf{y})} \frac{\partial I(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \ln I(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

一般に

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_\mu} \rangle = \frac{1}{I(\mathbf{y})} \frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial}{\partial y_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial y_{i_\mu}} I(\mathbf{y})$$

特に

$$\langle x_i x_j \rangle_0 = (M^{-1})_{ij}.$$

これから有名な Wick's rule が出る。

複素ガウス積分の時は M をエルミート行列として（よって対角化可能）

$$\begin{aligned} I_0 &:= \int \prod_i \left[\frac{dq_i \wedge dp_i}{2\pi} \right] e^{-\mathbf{z}^* M \mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{\det M} \end{aligned}$$

ここで source $\mathbf{w}$ として

$$\begin{aligned} I(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*) &:= \int \prod_i \left[\frac{dq_i \wedge dp_i}{2\pi} \right] e^{-[\mathbf{z}^* M \mathbf{z} - \mathbf{w}^* \mathbf{z} - \mathbf{z}^* \mathbf{w}]} \\ &= \int \prod_i \left[\frac{dq_i \wedge dp_i}{2\pi} \right] e^{-[(\mathbf{z}^* - \mathbf{w}^* M^{-1}) M (\mathbf{z} - M^{-1} \mathbf{w}) - \mathbf{w}^* M^{-1} \mathbf{w}]} \\ &= I_0 e^{\mathbf{w}^* M^{-1} \mathbf{w}} \end{aligned}$$

よって

$$\langle z_i z_j^* \rangle_0 = (M^{-1})_{ij}$$

となり、Wick's rule が導かれる。

6.3 有効ポテンシャル

ここでは有効ポテンシャルの 2 階微分（プロパゲータに対応）の正定値性について。まず $\ln x$ は $x > 0$ で上に凸。よって $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$, $a, b > 0$ として

$$\alpha \ln a + \beta \ln b \leq \ln(\alpha a + \beta b)$$

よって

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

ここで

$$\begin{aligned} a &= \frac{e^{\mathbf{x} \mathbf{y}_1}}{\int d^n \mathbf{x} e^{-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{y}_1}} \\ b &= \frac{e^{\mathbf{x} \mathbf{y}_2}}{\int d^n \mathbf{x} e^{-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{y}_2}} \end{aligned}$$

と置き、上の不等式に代入し、 $e^{-L(\mathbf{x})}$ ($L(\mathbf{x})$ は適当な関数) をかけて $\mathbf{x}$ で積分すると、 $\alpha + \beta = 1$ より

$$\int d^n \mathbf{x} e^{-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x}(\alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2)} \leq \left[\int d^n \mathbf{x} e^{-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{y}_1} \right]^\alpha \left[\int d^n \mathbf{x} e^{-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{y}_2} \right]^\beta.$$

ここで

$$Z(\mathbf{y}) := \int d\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_n e^{-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x}\mathbf{y}}$$

とすると

$$Z(\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2) \leq Z(\mathbf{y}_1)^\alpha Z(\mathbf{y}_2)^\beta$$

さらに

$$Z(\mathbf{y}) = e^{W(\mathbf{y})}$$

と置く。 $W(\mathbf{y})$ は有効ポテンシャルに対応する。上の不等式により

$$W(\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2) \leq \alpha W(\mathbf{y}_1) + \beta W(\mathbf{y}_2)$$

つまり $W(\mathbf{y})$ は凸関数である。よって $\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}}(\mathbf{y})$ は正定値であることが分かる。

6.4 ルジャンドル変換

前節の $Z(\mathbf{y}) = e^{W(\mathbf{y})}$ に対し

$$\Gamma(\tilde{\mathbf{x}}) := W(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}}$$

と置く。その全微分は

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}) - \tilde{\mathbf{x}} \right) d\mathbf{y} - \mathbf{y} d\tilde{\mathbf{x}}$$

ルジャンドル変換は変数 $\mathbf{y}$ を $\tilde{\mathbf{x}}$ の関数として消去し、 Γ が $\tilde{\mathbf{x}}$ だけに依存するようにする。つまり、上の全微分の $d\mathbf{y}$ の成分を 0 として $\mathbf{y}$ を消す。よって

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathbf{x}} &= \underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}}(\mathbf{y})}_{=: G} d\mathbf{y} \\ d\mathbf{y} &= G^{-1} d\tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

にて $\mathbf{y}$ と $\tilde{\mathbf{x}}$ は変換する。よってルジャンドル変換は

$$\begin{aligned} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{x}}) &= -\mathbf{y} \\ \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}) &= \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

前節までの話から

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \ln Z(\mathbf{y}) \\ &= \langle \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

つまり、 $\mathbf{y} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ の変換は期待値 $\langle \mathbf{x} \rangle$ を独立変数として扱うように変換していることになる。

Γ の全微分は

$$\Gamma(\tilde{\mathbf{x}}_0 + \Delta\tilde{\mathbf{x}}) = \Gamma(\tilde{\mathbf{x}}_0) + \underbrace{\frac{\partial \Gamma}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{x}}_0)}_{=\mathbf{y}_0} \Delta\tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \tilde{\mathbf{x}} \partial \tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{x}}_0)}_{=G^{-1}} \Delta\tilde{\mathbf{x}} \Delta\tilde{\mathbf{x}} + \cdots$$

よって $\mathbf{y}_0 = 0$ (physical) の時、右辺第 2 項は 0。 G^{-1} が正定値であることから、 $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_0$ は極小点となる。つまり $\Gamma(\tilde{\mathbf{x}}_0)$ は極小値。

6.5 真空期待値を持つ場合

ここでの説明は、場の理論において真空期待値が nonzero の場合の処方に対応する。

真空期待値 $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{y}}$ が 0 でない場合の対処法。

$$\begin{aligned} e^{W(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}}_0} &= \int d\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_n e^{-[L(\mathbf{x}) - \mathbf{y}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0)]} \\ &= \int d^n \dot{\mathbf{x}} e^{-[L(\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}_0) - \mathbf{y}\dot{\mathbf{x}}]} \end{aligned}$$

これを $\mathbf{y}$ で微分すると

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}) - \tilde{\mathbf{x}}_0 \right) e^{W(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}}_0} = \int d^n \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} e^{-[L(\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}_0) - \mathbf{y}\dot{\mathbf{x}}]}$$

従って、新しい”ラグランジアン” $L(\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}_0)$ のもとでの真空期待値を

$$\langle \dot{\mathbf{x}} \rangle_1 := \frac{\int d^n \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} e^{-[L(\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}_0) - \mathbf{y}\dot{\mathbf{x}}]}}{e^{W - \mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}}_0}}$$

で定義すると

$$\langle \dot{\mathbf{x}} \rangle_1 = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}) - \tilde{\mathbf{x}}_0$$

ここで $\mathbf{y} \rightarrow 0$ の極限を取り、 $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{y}}(0)$ とすると

$$\langle \dot{\mathbf{x}} \rangle_1 = 0$$

また、この真空期待値をもう一度 $\mathbf{y}$ で微分すれば、それは $\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}}$ に等しい。つまり新しい”ラグランジアン” $L(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}_0)$ での”場” $\mathbf{x}$ の期待値は 2 点以上では元の”ラグランジアン” $L(\mathbf{x})$ でのそれに等しい。一般に場の理論で、系が真空期待値を持つ場合には、このような処方がなされる。

6.6 古典解周りの量子補正

ここでの説明は、場の量子論において古典解周りの量子補正を計算する方法に対応している。まず、分配関数

$$Z(\mathbf{y}) = e^{W(\mathbf{y})} = \int d\mathbf{x} e^{-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x}\mathbf{y}}$$

次に、”オイラー・ラグランジュ方程式”は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x}\mathbf{y}] &= -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

この解を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ と置く（よって $\mathbf{x}_0$ は $\mathbf{y}$ に依存する）。つまり $\mathbf{x}_0$ が古典解に対応する。よって、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ と置くと

$$-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x}\mathbf{y} = -L(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0\mathbf{y} + \underbrace{\left[-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{y} \right]}_{=0} \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1 \right] + \cdots$$

よって

$$e^{W(\mathbf{y})} = e^{-L(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0\mathbf{y}} \int d^n \mathbf{x}_1 e^{-\left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1 + \cdots \right]}$$

ここで被積分関数の指数の中の $[\dots]$ の中の $\mathbf{x}_1$ の 2 次以降が無視できると仮定すると

$$\approx e^{-L(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 \mathbf{y}} \int d^n \mathbf{x}_1 e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_1}$$

ここで一般に

$$\begin{aligned} \int d^n \mathbf{x}_1 e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}_1 M \mathbf{x}_1} &= \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det M}} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \text{tr} \ln M + \frac{n}{2} \ln 2\pi} \end{aligned}$$

より

$$e^{W(\mathbf{y})} \approx e^{-L(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 \mathbf{y} - \frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) + \frac{n}{2} \ln 2\pi}$$

即ち

$$W(\mathbf{y}) \approx \underbrace{-L(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 \mathbf{y}}_{=: W_0(\mathbf{y})} - \underbrace{\frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) + \frac{n}{2} \ln 2\pi}_{=: W_1(\mathbf{y})}$$

ここで $\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}_0$ である。即ち場の真空期待値の first order は古典解となる。これに前節の対処法を施せば、真空期待値を 0 として計算できる。

上で無視した 2 次以降の積分を実行すれば相互作用の効果を見ることができる。その場合規格化により W_0 と W_1 は消える。

6.7 一般的な相互作用の場合

一般的な相互作用がある場合には、通常の摂動論で扱う。分配関数

$$Z(\mathbf{y}) = e^{W(\mathbf{y})} = \int d^n \mathbf{x} e^{-L(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{y}}$$

に対し、ラグランジアンが

$$L(\mathbf{x}) = L_0(\mathbf{x}) + L_I(\mathbf{x})$$

と、計算出来る項 L_0 と相互作用項 L_I とに 2 つに分けられる場合。つまり

$$Z_0(\mathbf{y}) = e^{W_0(\mathbf{y})} := \int d^n \mathbf{x} e^{-L_0(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{y}}$$

が正確に分かっている時。このとき

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{y}) &= \int d^n \mathbf{x} e^{-L_I(\mathbf{x})} e^{-L_0(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{y}} \\ &= \int d^n \mathbf{x} e^{-L_I(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}})} e^{-L_0(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{y}} \\ &= e^{-L_I(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}})} e^{W_0(\mathbf{y})} \\ &= e^{-L_I(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}})} Z_0(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

として計算出来る。特に L_0 が 2 次形式である場合、つまり

$$\begin{aligned} Z_0(\mathbf{y}) &= \int d^n \mathbf{x} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x} M \mathbf{x} + \mathbf{x} \mathbf{y}} \\ &= I_0 e^{\frac{1}{2} \mathbf{y} M^{-1} \mathbf{y}} \quad (I_0 = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det M}}) \end{aligned}$$

の時、Wick's rule が導出できる。

7 いくつかの量子力学での例

7.1 汎関数積分を q のみの積分に変えること

汎関数積分は

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int [dq][dp] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 (p(t_1) \dot{q}(t_1) - H(q(t_1), p(t_1), t_1)) \right]$$

である。物理においてラグランジアン L は $\dot{q}$ の 2 次で出てくる。

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

より、ラグランジアン L 中の $\dot{q}$ を消去すると p についての 2 次になる。よってハミルトニアン H の中には p が 2 次までしかない。従って、上の汎関数積分において p 積分はガウス積分型になり、integrate out 出来る。従って最終的には q についての積分だけになる。しかも簡単な計算で、 p で積分した後は $p\dot{q} - H$ は通常のラグランジアン L に変換されることが分かる。つまり最終的には汎関数積分は

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int [dq] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \right]$$

となる。ただし p 積分で出てくる factor は本質的でないので $[dq]$ の測度にそれを含めて再定義している。

7.2 調和振動子

調和振動子の場合。ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$$

この時

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int [dq] e^{i \int_{t_0}^t \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)} \\ &= e^{i \int_{t_0}^t L_{cl}} \int [dq] e^{i \int_{t_0}^t \frac{1}{2}(\dot{q} - \omega^2 q^2)} \end{aligned}$$

ここで汎関数積分の測度は時刻 t, t_0 での q の値は $q = q_0 = 0$ となっている。これは調和振動子の古典解 q_{cl} 周りの展開である (WKB 近似)。汎関数積分の部分は、フーリエ変換すると簡単に計算出来る。また、 $t_0 = 0, t = T$ と置いて考えても一般性を失わない。この時、境界条件を考慮すると $q(t)$ は

$$q(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin\left(\frac{\pi n}{T} t\right)$$

となる。よって、汎関数積分の部分は

$$\begin{aligned} &= \int [dq] \exp \left[-\frac{i}{2} \int_0^T dt \cdot q \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \omega^2 \right) q \right] \\ &= \int [dq] \exp \left[-\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\left(\frac{\pi n}{T} \right)^2 + \omega^2 \right) q_n^2 \right] \\ &\propto N \prod_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{1}{\omega^2 - \left(\frac{\pi n}{T} \right)^2}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\omega T}{\sin \omega T}} \cdot (\text{const}) \end{aligned}$$

ここで N は適当な規格化の factor。また、最後の等式は $\omega = 0$ の時、明らかに自由粒子の振幅にならないといけな
いので、 $\omega \rightarrow 0$ で有限の値になるように ω の factor が、同様に T の factor がついている。

const を求めるには $\omega \rightarrow 0$ を考えればよい。つまり自由粒子である。

$$\begin{aligned}\langle q=0|e^{-i\frac{T}{2}p^2}|q_0=0\rangle &= \int dp \langle q=0|e^{-i\frac{T}{2}p^2}|p\rangle \langle p|q_0=0\rangle \\ &= \int dp \cdot e^{-i\frac{T}{2}p^2} |\langle q=0|p\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{Ti}}\end{aligned}$$

従って $\omega \rightarrow 0$ でこの自由粒子の場合に一致するには

$$(\text{const}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i}}$$

よって汎関数積分の部分は

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega T}}$$

従って

$$\langle q, t|q_0, t_0\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega T}} e^{iS_{cl}}$$

となる。ただし、 $T = t - t_0$ と置いた。ここで S_{cl} は

$$S_{cl} = \frac{\omega}{2} \frac{(q^2 + q_0^2) \cos \omega T - 2qq_0}{\sin \omega T}.$$

である（これはハミルトン-ヤコビ理論などから求まる。もちろん頑張って計算すれば汎関数積分で直接計算することも出来る）。

7.3 自由粒子の場合

前節で自由粒子を求めたので、ついでにまとめる。

$$\begin{aligned}\langle q, t|q_0, t_0\rangle &= e^{iS_{cl}} \int [dq] e^{i \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \dot{q}^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi iT}} e^{iS_{cl}}\end{aligned}$$

ここで S_{cl} はハミルトン-ヤコビで計算できて

$$S_{cl} = \frac{(q - q_0)^2}{2T}$$

となる。これも直接計算出来る。この場合にはシュレディンガー方程式を直接解いて、時間発展演算子の座標表示を求めるのが簡単だと思う。

7.4 一般的な場合における WKB 近似での例

ここでは一般的な場合について。ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$$

の場合。

$$\begin{aligned}\langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int [dq] \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - V \right) \right] \\ &= e^{iS_{cl}} \int [dq]_{q=q_0=0} \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{1}{2} \ddot{V}(q_{cl}) q^2 - \overbrace{\frac{1}{3!} \ddot{V}(q_{cl}) q^3 - \dots}^{=:L_I(q)} \right) \right] \\ &= e^{iS_{cl}} \int [dq] e^{i \int L_I(q)} \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{\ddot{V}(q_{cl})}{2} q^2 \right) \right] \\ &\approx e^{iS_{cl}} \int [dq] \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{\ddot{V}(q_{cl})}{2} q^2 \right) \right] \\ &= e^{iS_{cl}} N \left[\det \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \ddot{V}(q_{cl}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

これはちょうど各振動数 $\omega = \ddot{V}(q_{cl})$ の調和振動子になっている。

次に source f を入れて考える。今度は形式的な解について。ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) + qf.$$

この時

$$\begin{aligned}\langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int [dq] \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - V + qf \right) \right] \\ &= e^{iS_{cl}^f} \int [dq]_{q(t)=q(t_0)=0} \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{\ddot{V}(q_{cl})}{2} q^2 - \overbrace{\frac{\ddot{V}(q_{cl})}{3!} q^3 - \dots}^{=:L_I(q)} + qf \right) \right] \\ &= e^{iS_{cl}^f} \int [dq] e^{L_I(\frac{\delta}{\delta f})} \exp \left[i \int_{t_0}^t dt \left(-\frac{1}{2} q \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \ddot{V}(q_{cl}) \right) q + qf \right) \right] \\ &= e^{iS_{cl}^f} e^{L_I(\frac{\delta}{\delta f})} \left[e^{\frac{i}{2} f G f} \int [dq] \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt \frac{1}{2} (q - fG) \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \ddot{V}(q_{cl}) \right) (q - Gf) \right] \right] \\ &= e^{iS_{cl}^f} e^{L_I(\frac{\delta}{\delta f})} \left[e^{\frac{i}{2} f G f} \langle q = -Gf(t), t | q = -Gf(t_0) \rangle_{ho} \right]\end{aligned}$$

となる。ここで $\langle \dots \rangle_{ho}$ は調和振動子の意味で、 $G = \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \ddot{V}(q_{cl}) \right)^{-1}$ である。特に古典解 q_{cl} として $q_{cl} = \text{const}$ とすると

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = e^{iS_{cl}^f} e^{L_I(\frac{\delta}{\delta f})} \left[e^{\frac{i}{2} f G f} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega T}} e^{iS_{cl}(-Gf(t), -Gf(t_0))} \right]$$

ここで $\omega = \ddot{V}(q_{cl})$, $T = t - t_0$ で、 $S_{cl}(q, q_0)$ は調和振動子の作用。

8 フェルミオン

ここまではいわゆる”ボソン”の場合についての説明だった。以下ではフェルミオンの場合の説明。ここでボソンとフェルミオンについて簡単に説明する。素粒子にはボソンとフェルミオンの2種類の粒子がある。違いはボソンの場合には2つのボソン粒子が全く同じ状態になりうる。フェルミオンの場合には2つのフェルミオン粒子が全く同じ状態になることはない。数学的にはボソンを表す生成消滅演算子（場の理論ではこれが基本になる）は交換関係により特徴づけられる。即ち

$$[a, a^\dagger] = \hbar$$

である。これに対し、フェルミオンを表す生成消滅演算子の交換関係は、反交換関係となる。即ち a, b の反交換子を $\{a, b\} =: ab + ba$ とすると、

$$\{a, a^\dagger\} = \hbar$$

である。フェルミオンの場合にはこの反交換関係が基本となる。以下でフェルミオンの場合の調和振動子の説明をする。

8.1 フェルミオンの調和振動子

フェルミオンの場合の調和振動子は、生成消滅演算子 $a, a^\dagger$ に対し

$$\{a, a^\dagger\} = \hbar, \quad a^2 = (a^\dagger)^2 = 0$$

なる関係式で定義される。ボソンの場合には $\frac{a^\dagger a}{\hbar}$ が粒子の個数演算子であった。同様にフェルミオンの場合にも $\frac{a^\dagger a}{\hbar}$ がフェルミオン粒子の個数演算子となる。これは

$$\begin{aligned} \frac{a^\dagger a}{\hbar} \left(1 - \frac{a^\dagger a}{\hbar}\right) &= \frac{a^\dagger a^2 a^\dagger}{\hbar^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

より固有値が 0, 1 のみであるのが分かる。固有値 0 に属する規格化した固有ベクトルを $|0\rangle$ と書き、これを真空状態という。即ち

$$a^\dagger a |0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1$$

である。これに左から $\langle 0|$ をかければ

$$a |0\rangle = 0$$

が分かる。固有値 1 の固有ベクトルは $a^\dagger |0\rangle$ となる。規格化すれば $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} a^\dagger |0\rangle$ となる。ボソンの場合と同様に経路積分を導くには、まずコヒーレント状態を定義する必要がある。フェルミオンの場合のコヒーレント状態の固有値はグラスマン数といわれる代数の元となる。以下の節でグラスマン数の説明をする。

8.2 グラスマン数

ここではグラスマン数についての一般的な説明をする。 G_1 を（一般には無限次元の） $\mathbb{R}$ 上の加法群とする。さらに G_1 の任意の元 ζ, ξ に対し、積 $\zeta\xi$ が定義されているとする。 G_1 の元 2 個の積全体から生成される加法群を G_2 、

3 個の積全体から生成される加法群を G_3 などとする。一般には n 個の積全体から生成される加法群を G_n とする。特に G_0 は $\mathbb{R}$ である。さらに G_1 の任意の 2 つの元 ζ, ξ の積 $\zeta\xi$ が反可換、即ち

$$\zeta\xi = -\xi\zeta$$

とする。この時、 $G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} G_n$ をグラスマン環と呼ぶことにし、その元をグラスマン数という。この積関係により G は自然に環となる。グラスマン数は、その積の反可換性より

$$\zeta^2 = 0$$

となる。従ってグラスマン数の関数 $f(\zeta) \in G$ は一般に

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta$$

と一次関数となる。グラスマン数の多変数関数に関しても同様である。

次にグラスマン微分を、 $\zeta \in G_1$ に対し

$$\frac{d}{d\zeta}(a_0 + a_1\zeta) = a_1$$

で定義する。同様にグラスマン積分を

$$\int d\zeta(a_0 + a_1\zeta) = a_1$$

で定義する（グラスマン積分は Berezin 積分ともいわれる）。要するにグラスマン微分とグラスマン積分は全く同じである。場の量子論において、記述をボソンのものと統一するためにわざわざ両方を定義している。一般的には、グラスマン数 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \in G_1$ に対し、 $\omega = a\zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_n \in G_n$ の ζ_i でのグラスマン微分は

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \omega = (-1)^{i-1} a \zeta_1 \zeta_2 \cdots \overset{i}{\zeta_n}$$

で、グラスマン積分も同様に

$$\int d\zeta_i \omega = (-1)^{i-1} a \zeta_1 \zeta_2 \cdots \overset{i}{\zeta_n}$$

で定義される。従って $\zeta \in G_1$ に対し、”ストークスの定理”

$$\int d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} f(\zeta) = 0$$

が成立する。容易に分かるように、2 つのグラスマン微分作用素 $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ と $\frac{\partial}{\partial \xi}$ は反可換であり、同様に 2 つのグラスマン積分どうしも反可換である。

次に多変数のグラスマン積分の積分変数の変換則について。 ζ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) $\in G_1$ 、 $n \times n$ 行列 $M_{ij} \in \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$ に対し

$$\xi_i = M_{ij} \zeta_j$$

と置くと、 $\frac{\partial}{\partial \zeta_i} = M_{ji} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \cdots \frac{\partial}{\partial \zeta_n} &= \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \frac{\partial}{\partial \zeta_{i_1}} \frac{\partial}{\partial \zeta_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial \zeta_{i_n}} \\ &= \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \cdots M_{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial \xi_{j_1}} \frac{\partial}{\partial \xi_{j_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_{j_n}} \\ &= \det M \frac{1}{n!} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} \frac{\partial}{\partial \xi_{j_1}} \frac{\partial}{\partial \xi_{j_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_{j_n}} \\ &= \det M \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_n} \end{aligned}$$

となる。全く同様に

$$\int d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n = \det M \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n$$

となる。これは通常の積分の積分変数の変数変換則とちょうど逆になっている。 ξ_i, ζ_j が通常の実変数とした時、積分変数の変換則は

$$\int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n = \det M \int d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n$$

となるからである。場の理論に必要なガウス積分は、 $n = 2m$ の時

$$\begin{aligned} \int d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n e^{-\frac{1}{2}\zeta M \zeta} &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \int d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n M_{i_1 i_2} M_{i_3 i_4} \cdots M_{i_{n-1} i_n} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \cdots \zeta_{i_n} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_{n-1} i_n} \int d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n \\ &= \frac{1}{2^m m!} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_{n-1} i_n} \\ &= \text{Pf}(M) \end{aligned}$$

となる。ここで $\text{Pf}(M)$ はパツフィアンである。

G の複素化 $G^c := \mathbb{C} \otimes G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} G_n^c$ を複素グラスマン環と呼ぶことにする。要するにグラスマン環の定義において $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に代えたもの。この場合にも、グラスマン微分、グラスマン積分は同様に定義される。実グラスマン環 G と複素グラスマン環 G^c との関係が $\zeta_1, \zeta_2 \in G_1$ として、 $\xi \in G_1^c$ が

$$\begin{pmatrix} \xi^* \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

で与えられた時、上述の関係式がそのまま成立する。即ち

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} = 2i \frac{\partial}{\partial \xi^*} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \int d\zeta_1 d\zeta_2 = 2i \int d\xi^* d\xi$$

となる。ガウス積分は $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \in G_1^c$ に対し

$$\begin{aligned} \int \prod_{i=1}^n [d\zeta_i^* d\zeta_i] e^{-\zeta^* M \zeta} &= \frac{(-1)^n}{n!} \int \prod_{i=1}^n [d\zeta_i^* d\zeta_i] M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \cdots M_{i_n j_n} \zeta_{i_1}^* \zeta_{j_1} \zeta_{i_2}^* \zeta_{j_2} \cdots \zeta_{i_n}^* \zeta_{j_n} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int \prod_{i=1}^n [d\zeta_i^* d\zeta_i] \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} M_{i_1 j_1} \cdots M_{i_n j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} \zeta_1^* \zeta_1 \cdots \zeta_n^* \zeta_n \\ &= (-1)^n \det M \int \prod_{i=1}^n [d\zeta_i^* d\zeta_i] \zeta_1^* \zeta_1 \cdots \zeta_n^* \zeta_n \\ &= \det M \end{aligned}$$

となる。これは通常の複素ガウス積分と比べてちょうど逆数になっている。またこのガウス積分は ζ_i と ζ_i^* が複素共役でない場合、即ち $2n$ 個のグラスマン積分変数によるものとしても同じ結果であることは容易に分かると思う。

最後にひとつ述べておくと $\zeta_1, \zeta_2 \in G_1^c$ に対して、それらの積の複素共役は後に述べる整合性のために

$$(\zeta_1 \zeta_2)^* = \zeta_2^* \zeta_1^*$$

で定義しなければならないことに注意されたい。

8.3 フェルミオンのコヒーレント状態

以上によりフェルミオンを扱う準備が整った。フェルミオンのハミルトニアンは、個数演算子の倍数

$$H = \omega a^\dagger a$$

で定義される。真空状態は

$$H|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1$$

である。エネルギー固有値は $0, \hbar\omega$ であり、固有値 $\hbar\omega$ の固有ベクトルは $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}a^\dagger|0\rangle$ である。左からも真空状態をかければ

$$a|0\rangle = 0$$

が分かる。

ハイゼンベルグ表示で a の時間発展 $a_t := U_t^\dagger a U_t$ のハイゼンベルグ方程式は

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} a_t &= U_t^\dagger [a, H] U_t \\ &= \hbar\omega a_t \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} a_t &= e^{-i\omega t} a \\ a_t^\dagger &= e^{i\omega t} a^\dagger \end{aligned}$$

となる。コヒーレント状態は、 a と $a^\dagger$ との間には反交換関係が定義されているので、ボソンの時のように交換関係からはコヒーレント状態を定義出来ない。ここでグラスマン数が必要になる。 $\zeta \in G_1^c$ として

$$e^{\frac{a^\dagger \zeta}{\hbar}} |0\rangle = |\zeta\rangle$$

これにより実際 $e^{-\frac{a^\dagger \zeta}{\hbar}} a e^{\frac{a^\dagger \zeta}{\hbar}} = a + \zeta$ より

$$a|\zeta\rangle = \zeta|\zeta\rangle$$

となる。ただし、 $a, a^\dagger$ のいずれとも G_1^c の元（グラスマン数）は反交換するものとする。同様に

$$\langle 0| e^{\frac{\zeta^* a}{\hbar}} = \langle \zeta^*|$$

とすると

$$\langle \zeta^*| a^\dagger = \langle \zeta^*| \zeta^*$$

である。これらより

$$\langle \zeta_1^*| \zeta_2\rangle = e^{\frac{\zeta_1^* \zeta_2}{\hbar}}$$

が得られる。これは直接計算したほうが早いかもしれない。（前節で述べた複素グラスマン数の複素共役の約束はここで説明される。即ち

$$\langle \zeta_1^*| \zeta_2\rangle^* = \langle \zeta_2^*| \zeta_1\rangle$$

でないといけないからである。)

コヒーレント状態のエネルギー固有状態での表示は

$$\langle 0|\zeta\rangle = 1, \quad \langle 1|\zeta\rangle = \frac{\zeta}{\sqrt{\hbar}}$$

となる。1 の分割は

$$\begin{aligned} |\zeta\rangle \langle \zeta^*| &= \left(1 + \frac{a^\dagger \zeta}{\hbar}\right) |0\rangle \langle 0| \left(1 + \frac{\zeta^* a}{\hbar}\right) \\ &= |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 0| \frac{\zeta}{\sqrt{\hbar}} + \frac{\zeta^*}{\sqrt{\hbar}} |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 1| \frac{\zeta \zeta^*}{\hbar} \end{aligned}$$

従って、簡単な計算により

$$\int \hbar d\zeta^* d\zeta e^{-\frac{\zeta^* \zeta}{\hbar}} |\zeta\rangle \langle \zeta^*| = 1$$

が分かる。 $\langle \zeta^*, t | \zeta_0, t_0 \rangle$ の汎関数積分表示はボソンの場合とほぼ同様である。結果だけ書くと

$$\begin{aligned} \langle \zeta^*, t | \zeta_0, t_0 \rangle &= \int \left[\prod_{i=1}^N \hbar d\zeta_i^* d\zeta_i \right] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \sum_{i=0}^N \left(-i \frac{\Delta \zeta_i^*}{\Delta t_i} \zeta_i - H_i \right) \Delta t_i \right] e^{\frac{\zeta_0^* \zeta_0}{\hbar}} \\ &\quad (N \rightarrow \infty \text{ で}) \\ &= \int [d\zeta^*][d\zeta] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt \left(-i \frac{d\zeta^*}{dt}(t) \zeta(t) - H(\zeta^*(t), \zeta(t), t) \right) \right] e^{\frac{\zeta_0^* \zeta_0}{\hbar}} \\ &\quad (\text{部分積分して}) \\ &= \int [d\zeta^*][d\zeta] \exp \left[-\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt \left(i \zeta^*(t) \frac{d\zeta}{dt}(t) - H(\zeta^*(t), \zeta(t), t) \right) \right] e^{\frac{\zeta^*(t) \zeta(t)}{\hbar}} \end{aligned}$$

となる。