ゲージ理論

TKG

2025 年 3 月 5 日

目 次

1 INTRODUCTION 1

2 ベクトル束 1

3 ファイバー束 2

4 接続 3

5 曲率 4

6 擬リーマン幾何 4

7 特性類 7

A 付録 11

1 INTRODUCTION

ゲージ理論の基礎的なトピックです。計量が Euclid でない場合についての説明も多少含みます。ゲージ理論は素粒子論をやるなら必須といっても過言ではないので簡潔にトピックをまとめました。特性類や指数定理にも多少触れてます。

2 ベクトル束

M、E を多様体とし、$\pi : E \to M$ を滑らかな全射とする。また $x \in M$ の時、$V_x = \pi^{-1}(x)$（これを x 上のファイバーと呼ぶ）が x によらず一定次元のベクトル空間 V（次元を r とする）に同型であるとする（よって V_x はベクトル空間である)。さらに $\forall x \in M$ に対し、x の開近傍 U が存在し、微分同型 $\phi : U \times V \to \pi^{-1}(U)$ で

$$\pi\phi(x, v) = x \quad (x \in U, v \in V)$$

を満たすものが存在するとする。この時 E を、底空間を M とした、ファイバーが V のベクトル束（ベクトルバンドル）という。またこの時 U を座標近傍、ϕ を座標関数という。

M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ 及び、各 U_α に対して、座標関数 $\phi_\alpha : U_\alpha \times V \simeq \pi^{-1}(U_\alpha)$ が存在する。この時 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ を座標近傍系という。

次に G を群とし、$U_\alpha \cap U_\beta$ に対し、滑らかな写像

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

の族 $\{g_{\alpha\beta}\}$ は、$x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対し

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$$
$$g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$$

を満たす時、G に値を持つ M 上の座標変換系であるという。

$x \in U_\alpha$ に対し $\phi_\alpha(x) : V \to \pi^{-1}(x)$ を

$$\phi_\alpha(x) = \phi_\alpha(x, \cdot)$$

で定義する。この時 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{End}(V)$ を（$\mathrm{End}(V) = G$ と置く）

$$\phi_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha^{-1}(x) \circ \phi_\beta(x)$$

で定義すると $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ は座標変換系をなす。直観的には、ベクトル束 E は各 U_α 上では自明、即ち $U_\alpha \times V$ であり、この座標変換系により M 全体にわたって

$U_\alpha \times V$ を張り合わせていったものと言える。この時 $G = \mathrm{End}(V)$ を構造群という。

逆に座標変換系が与えられれば、それにより $U_\alpha \times V$ を張り合わせていけば、ファイバー束が定義出来る。

3 ファイバー束

先のベクトル束の定義でファイバー V をそのまま G に代えて定義した時、これを主 G 束（主 G バンドル）という。以下では主 G 束を P で表すことにする。

一般には、多様体 M に、G に値を持つ座標変換系 $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ が定義されているとする。また F（これはある位相空間とする）には G が推移的に作用しているとする[1]。この時、開被覆 $\{U_\alpha\}$ に対して、$U_\alpha \times F$ を定義し、座標変換系 $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ を用いて F を張り合わせていく。このようにして出来たものを一般に F をファイバーに持つファイバー束（ファイバーバンドル）という。要するに、ベクトル束の定義でベクトル空間 V の代わりに F で置き換えて定義したもの。

普通は主 G 束を基本に考える。ある主 G 束がある時、G が F に推移的に作用しているならば、その座標変換系を用いて張り合わせていくことにより F をファイバーとしたファイバー束が定義出来る。これをファイバーを F とした主 G 束の同伴バンドルといい、$P \times_G F$ と書く。

ベクトル空間 V に対し、$G = \mathrm{End}(V)$ の時、同伴バンドルとして、ベクトル束 $E = P \times_G V$ を定義することもできる。

ファイバー束 E の底空間 M の各点 x に対し、各ファイバー V_x から 1 つ元を選び出したものを E の切断という。即ち切断とは $f : M \to E$ であり、

$$\pi f(x) = x$$

を満たすもの。通常これは x に関して滑らかであると仮定する。切断全体からなる集合を $\Gamma(E)$ と書く。E がベクトル束の場合、$\Gamma(E)$ はベクトル空間になる。

M を n 次元多様体とし、$x \in M$ を固定し、x でのベクトル場 $v(x) = v^i(x)\partial_i$ を x の接ベクトルといい、x の接ベクトル全体からなる集合を T_xM と書く。$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ は自然に $2n$ 次元多様体の構造が入り、ベクトル束の構造を持つ。これを接ベクトル束という。T_xM^* なども同様に定義し、TM^* を余接ベクトル束という。つまり TM や TM^* の場合、切断とはベクトル場、1-form であり、これら全体からなる集合を $\Gamma(TM)$、$\Gamma(TM^*)$ と書く。また $\overset{p}{\wedge}TM$ や $\overset{p}{\wedge}TM^*$ の場合には、p-vector、p-form であり、これら全体からなる集合は $\Gamma(\overset{p}{\wedge}TM)$、$\Gamma(\overset{p}{\wedge}TM^*)$ である。

ベクトル束の場合、局所自明性により、ある開集合 U 上で E の切断 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ が存在して、U の各点 x で $e_1(x), \cdots, e_r(x)$ が基底であるように選べる。それには V 上の基底 $e_1, \cdots, e_r$ を選び、$e_i(x) = \phi(x, e_i)$ と置けばよい。この基底を局所基底という。これらは一般には M 全体にわたり基底とはならない。なる場合にはベクトル束は自明束、即ち $E = M \times V$ となる。また、この局所基底を用いて E の切断 v は $v = e_i v^i$ と書ける。ここで $v^i = v^i(x)$ である。行列表示（ベクトル表示）をすれば $v = \mathbf{e}^t\mathbf{v}$ と書ける。さらに別の開集合 V へ変換するには、V 上の局所基底を w_i と書けば（$U = U_\alpha$、$V = U_\beta$ と置いて）座標変換系 $\{g_{\alpha\beta}\}$ を用いて $v = \acute{e}_i(g_{\alpha\beta})^i{}_j v^j$ と変換する。行列表示をすれば、$v = \acute{\mathbf{e}}^t g_{\alpha\beta}\mathbf{v}$ と書ける。

ベクトル束 E のファイバーを V とする。V の双対ベクトル空間 V^* が存在するとすると、ファイバーを V^* としたベクトル束を定義出来る。これを E^* と書き、双対束（双対バンドル）という。E の座標変換系を $g_{\alpha\beta}$ と書けば、E^* の座標変換系は $g_{\alpha\beta}^{-\dagger}$ である（$\dagger$ は双対行列を表し、$-\dagger$ は双対行列の逆行列を表す）。

底空間 M が共通なファイバー束 E、$\acute{E}$ に対しそのテンソル積 $E \otimes \acute{E}$、直和 $E \oplus \acute{E}$ なども同様に定義出来る。

[1] 推移的の意味は、任意の $v, u \in F$ に対し、ある $g \in G$ が存在し

$$v = gu$$

となるという意味。

底空間が M の2つのベクトル束 $E, \acute{E}$（それぞれの射影を $\pi, \acute{\pi}$ とする）が同値であるとは、滑らかな同型写像 $\varphi : E \to \acute{E}$ が存在し、$\acute{\pi} \circ \varphi = \pi$ であり、φ の各ファイバー $V_x = \pi^{-1}(x)$ （$x \in M$）への制限が同型写像 $V_x \to V_x$ を誘導することをいう。

ベクトル束 E の自己同型 $E \to E$ をゲージ変換という。近傍 U での局所基底を用いればゲージ変換は $v = \mathbf{e}^t\mathbf{v} \to \mathbf{e}^t h\mathbf{v}$ のように書ける。一方で U と交わる、別の近傍 V に対して $v = \acute{\mathbf{e}}^t\mathbf{u} \to \acute{\mathbf{e}}^t\acute{h}\mathbf{u}$ であったとする。U から V への座標変換が g（$\mathbf{e}^t = \acute{\mathbf{e}}^t g$）で与えられていたとする。座標変換してからゲージ変換しても、ゲージ変換してから座標変換しても同じでないといけないので、$\acute{h} = ghg^{-1}$ が得られる。即ち、ゲージ変換とは座標近傍系をなす開近傍 $\{U_\alpha\}$ に対して定義される構造群への滑らかな射 $h_\alpha : M \to G$ の族 $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ であり、$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ の時、

$$h_\beta = g_{\beta\alpha} h_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1} \tag{1}$$

を満たすものと言い換えることが出来る。

4 接続

ベクトル束 E に対し、微分を定義する。それには $v = e_i v^i \in \Gamma(E)$ に対し、その成分の $v^i(x)$ の微分だけでなく、局所基底 $e_i(x)$ の微分をも考える必要がある。そこで、共変微分（接続ともいう）$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes TM^*)$ を

$$\nabla v = e_i dv^i + (\nabla e_i) v^i$$

で定義する。E 上の共変微分であるということを強調したい時には ∇^E などとも書く。e_i が局所基底であるので、∇e_i は局所的に e_i の線形結合で表せる。そこで

$$\nabla e_j = e_i \omega_{ij}$$

と書ける。ここで ω_{ij} は 1-form である。つまり $\omega \in \Gamma(\mathrm{End}(E) \otimes TM^*)$ である[2]。これも行列表示で書けば $\nabla \mathbf{e}^t = \mathbf{e}^t \omega$ と書ける。この時 ω を接続形式という。よって

$$\nabla v = e_i (dv^i + \omega_{ij} v^j)$$

行列で書けば $\nabla v = \mathbf{e}^t(d\mathbf{v} + \omega\mathbf{v})$ である。∇v は $\mathrm{End}(E)$ 値 1-form なので、$X \in \Gamma(TM)$ とし、X と ∇v の縮約、$\nabla_X v = \nabla v[X]$ を定義出来る。これは成分で直接書けば

$$\nabla_X v = e_i (X v^i + \omega_{ij}[X] v^j)$$

である。

共変微分が局所基底を変えた時にどうなるかを考える。2つの局所基底 $e_1, \cdots, e_r$、$\acute{e}_1, \cdots, \acute{e}_r$ の間の座標変換を

$$\acute{e}_i = e_j \alpha_{ji} \quad (\acute{\mathbf{e}}^t = \mathbf{e}^t \alpha)$$

とし $\nabla \acute{e}_i = \acute{e}_j \acute{\omega}_{ij}$ とすると

$$\begin{aligned} \nabla \acute{\mathbf{e}}^t &= \acute{\mathbf{e}}^t \acute{\omega} \\ &= \mathbf{e}^t(\omega\alpha + d\alpha) \end{aligned}$$

よって基底をそろえて成分を比べれば

$$\acute{\omega} = \alpha^{-1}\omega\alpha + \alpha^{-1} d\alpha$$

となるのが分かる。

逆に上の変換則に従う行列値 1-form の族（これは座標変換系ごとに定義されてるとする）が与えられればそれにより接続形式が定義でき、共変微分も定義できる。

ベクトル束 E^* をベクトル束 E の双対ベクトル束とすると、E^* の共変微分は

$$d\langle v^*, v\rangle = \langle \nabla^{E^*} v^*, v\rangle + \langle v^*, \nabla^E v\rangle$$
$$v^* \in \Gamma(E^*), v \in \Gamma(E)$$

で定義される。v^*、v をそれぞれの局所基底に選べば、E^* の接続形式は $-\omega^t$ であることが分かる。

ベクトル束 E のファイバー V に内積が定義されている場合には、計量を g とし、内積を $v, u \in \Gamma(E)$ に対して

$$\langle v, u\rangle := g(v, u)$$

[2] $\mathrm{End}(E)$ はファイバーを $\mathrm{End}(V)$ に持つ、ベクトル束 E の同伴束である。ここで $\mathrm{End}(V)$ は V の自己同型全体からなる集合（群をなす）である。

で定義出来る。g を $E^* \otimes E^*$ の切断とみなせば、g にも接続が定義出来る。この時、一般には $\nabla g \neq 0$ であるが、$= 0$ の場合、即ち

$$d\langle v, u\rangle = \langle \nabla v, u\rangle + \langle v, \nabla u\rangle$$

の時、∇ は g を保つ、または g は並行であるなどという。v, u を局所正規直交基底 e_i, e_j に選ぶ、即ち

$$\begin{aligned}\langle e_i, e_j\rangle &= \eta_{ij} \\ \eta_{ij} &= \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とすれば、接続形式の条件として

$$\omega^\dagger \eta + \eta \omega = 0$$

が導かれる。即ち接続形式は $\mathfrak{so}(V)$ 値の 1-form である[3]。

共変微分は自然に $\Gamma(E \otimes \overset{p}{\wedge} TM^*)$ へ拡張出来る。$u = e_i u^i,\ u^i \in \Gamma(\overset{p}{\wedge} TM^*)$ に対し、

$$\nabla u = (\nabla e_i) \wedge u^i + e_i du^i$$

と定義すればよい。

5 曲率

ベクトル束 E の p-form の切断 $u = e_i u^i \in \Gamma(E \otimes \overset{p}{\wedge} TM^*)$ に対し、共変微分を 2 回作用させると、

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \nabla(\mathbf{e}^t(d\mathbf{u} + \omega \wedge \mathbf{u})) \\ &= \mathbf{e}^t(\omega \wedge d\mathbf{u} + d\omega \wedge \mathbf{u} + \omega \wedge \omega \mathbf{u} - \omega \wedge d\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{e}^t(d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \mathbf{u} \\ &= \Omega \wedge u\end{aligned}$$

ここで $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ と置いた。つまり ∇^2 は $\mathrm{End}(V)$ 値 2-form を与える。∇^2 を曲率といい、$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ を曲率形式という。曲率形式が座標変換のもと、どう変わるかを見てみる。2 つの局所基底 $e_1, \cdots, e_r$、$\acute{e}_1, \cdots, \acute{e}_r$ の間の接続形式の変換則を使えば

$$\begin{aligned}\acute{\Omega} =& d\acute{\omega} + \acute{\omega} \wedge \acute{\omega} \\ =& d(\alpha^{-1}\omega\alpha + \alpha^{-1}d\alpha) \\ & +(\alpha^{-1}\omega\alpha + \alpha^{-1}d\alpha) \wedge (\alpha^{-1}\omega\alpha + \alpha^{-1}d\alpha) \\ =& -\alpha^{-1}d\alpha\alpha^{-1} \wedge \omega\alpha + \alpha^{-1}d\omega\alpha + \alpha^{-1}\omega \wedge d\alpha \\ & -\alpha^{-1}d\alpha\alpha^{-1} \wedge d\alpha \\ & +(\alpha^{-1}\omega\alpha + \alpha^{-1}d\alpha) \wedge (\alpha^{-1}\omega\alpha + \alpha^{-1}d\alpha) \\ =& \alpha^{-1}(d\omega + \omega \wedge \omega)\alpha \\ =& \alpha^{-1}\Omega\alpha\end{aligned}$$

となり、曲率 ∇^2 が $\Gamma(\mathrm{End}(E) \otimes \overset{2}{\wedge} TM^*)$ の元であることが分かる。

ここで

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla^2 u) &= \nabla\Omega \wedge u + \Omega \wedge \nabla u \\ \nabla^2(\nabla u) &= \Omega \wedge \nabla u\end{aligned}$$

となるが、当然この両者は等しいので

$$\nabla\Omega = 0$$

となる。これを Bianchi の恒等式という。∇ を使わないで表せば、簡単な計算により（$\Omega = e_i \Omega_{ij} \theta^j$ に注意すれば）

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

が分かる。これは交換子を用いて $[\nabla, \Omega] = 0$ と書ける。（注意：当然ながら、これは $\nabla^3 = 0$ を意味しない。これは $[\nabla, \nabla^2] = 0$ を意味しているのである。）

6 擬リーマン幾何

基本的な概念は"幾何の話"の noteで説明しているので、そちらも参照。多様体を M とし、TM の計

[3] ここでは計量 η_{ij} による内積を持つベクトル空間 V に対し、計量を不変に保つ V 上の変換群を $\mathrm{O}(V)$ と書く。定義により明らかに $\mathrm{O}(V)$ の元の行列式は ± 1 である。行列式が $+1$ であるもの全体からなる部分群を $\mathrm{SO}(V)$ と書き、そのリー環を $\mathfrak{so}(V)$ と書く。ちなみに内積は

$$\begin{aligned}\langle v, u\rangle &= (v^i)^* \eta_{ij} u^j \\ &= \mathbf{v}^\dagger \eta \mathbf{u}\end{aligned}$$

である。

量を、局所座標を $x^1, \cdots, x^n$ とすると、

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

とする。この時、局所正規直交基 $e_1, \cdots, e_n$ を選び、それらの双対基を $\theta_1, \cdots, \theta_n$ とすれば、計量は

$$ds^2 = \eta_{ij} \theta^i \theta^j$$

となる。η_{ij} は前に与えた形の計量行列で

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

である。このような計量を与えられた多様体 M を擬リーマン多様体という。特に $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ であれば、リーマン多様体といい、η_{ij} が 1 つの成分だけ -1 で他の成分が $+1$ の場合にはローレンツ多様体という（1 つだけ $+1$ で他が -1 の場合にもいう）。

この時（V を計量を η に持つ n 次元ベクトル空間とし）$\mathfrak{so}(V)$ 値の 1-form ω で

$$\omega^t \eta = -\eta\omega$$
$$d\theta^i = -\omega_{ij} \wedge \theta^j$$

を満たすものが唯一存在することが示せる。まず

$$\omega_{ij} = c_{ijk} \theta^k$$

と置く。よって

$$\begin{aligned} -\omega_{ij} \wedge \theta^j &= -c_{ijk} \theta^k \wedge \theta^j \\ &= \sum_{j<k} (c_{ijk} - c_{ikj}) \theta^j \wedge \theta^k \end{aligned}$$

一方で

$$d\theta^i = \sum_{j<k} a_{ijk} \theta^j \wedge \theta^k$$

と置くと、関係式

$$a_{ijk} = c_{ijk} - c_{ikj} \tag{2}$$

を得る。ここで $A = \eta\omega$ と置き、$A = A_{ijk}\theta^k$ と置けば、関係式

$$\eta_{ij} c_{jkl} = A_{ikl}$$
$$\eta_{ij} A_{jkl} = c_{ikl}$$

を得る。$\omega^t \eta = (\eta\omega)^t = -\eta\omega$ より、$A = -A^t$ となり、よって $A_{ijk} = -A_{jik}$ となる。上の 2 式目を (2) 式に代入して $a_{ijk} = \eta_{il} A_{ljk} - \eta_{il} A_{lkj}$ となる。これに左から η をかけて、$b_{ijk} = \eta_{il} a_{ljk}$ と置けば

$$b_{ijk} = A_{ijk} - A_{ikj} \tag{3}$$

となる。同様にして

$$b_{jik} = A_{jik} - A_{jki} \tag{4}$$
$$b_{kji} = A_{kji} - A_{kij} \tag{5}$$

となる。ここで (3)+(4)-(5) を計算すると（$A_{ijk} = -A_{jik}$ に注意）

$$b_{ijk} + b_{jik} - b_{kji} = 2A_{kij}$$

を得る。後はこれに左から η をかければ

$$a_{ijk} + a_{jik} - a_{kji} = 2c_{kij}$$

となる。これで $\omega^t \eta = -\eta\omega$ でかつ、$d\theta = -\omega \wedge \theta$ を満たす ω が唯一存在することが示された。この ω が座標変換のもとで接続形式の満たすべき変換則を満たすことは容易に確かめられる。よって条件第 1 式により、この ω の族は計量を保つ（即ち $\nabla g = 0$）接続を定義する。この接続をレビ・チビタ接続という。

ここで局所正規直交基 e_i と、その双対基 θ^i のテンソル積 $e_i \theta^i$ の共変微分は

$$\nabla(e_i \theta^i) = e_i (\omega_{ij} \wedge \theta^j + d\theta^j)$$

と書ける。これは一般には 0 ではないが、レビ・チビタ接続の場合には条件第 2 式により 0 となる。この時

$$\Theta = d\theta + \omega \wedge \theta$$

を torsion form という。これが 0 の時、torsion free であるという。

ここでこのレビ・チビタ接続 ∇^{TM} に対し、TM^* 上の接続 ∇^{TM^*} も定義できる。上の記号をそのまま使えば $\nabla^{TM^*}(\theta^i) = -\theta^j \otimes \omega_{ij} = -\theta^j \otimes (c_{ijk}\theta^k)$ よって $\nabla^{TM^*}_{e^k}(\theta^i) = -\theta^j c_{ijk}$ となる。従って

$$\begin{aligned}\theta^k \wedge \nabla^{TM^*}_{e_k}\theta^i &= -\theta^k \wedge \theta^j c_{ijk} \\ &= -c_{ijk}\theta^k \wedge \theta^j \\ &= -\omega_{ij} \wedge \theta^j \\ &= d\theta^i\end{aligned}$$

これは一般的な $\Gamma(\overset{p}{\wedge}TM^*)$ へ拡張出来る。よって

$$d = \theta^i \wedge \nabla^{TM^*}_{e_i}$$

が一般に成り立つ。

ここで $\omega \in \Gamma(\overset{p}{\wedge}TM^*)$ に対し、内積（縮約）i_X（$X \in \Gamma(TM)$）を $\omega = \omega_{i_1\cdots i_p}\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}$ に対し

$$i_X\omega = \sum_j (-1)^{j-1}\omega_{i_1\cdots i_p}\theta^j[X]\theta^{i_1} \wedge \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots} \wedge \theta^{i_p}$$

で定義する。同様に i_f（$f \in \Gamma(TM^*)$）を

$$i_f\omega = \sum_j (-1)^{j-1}\omega_{i_1\cdots i_p}\langle f, \theta^j\rangle \theta^{i_1} \wedge \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots} \wedge \theta^{i_p}$$

で定義する（ここでは後者の方しか使わないが今後の利便上、両方定義しておく）。この時、計算を簡単にするため $\omega = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p$ と選ぶと

$$\theta^i \wedge *\omega = \pm\theta^i \wedge \theta^{p+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n \quad (1 \le i \le p)$$

となる（$*$ は Hodge 作用素）。ここで右辺の符号は $\eta^{11}\cdots\eta^{pp} = \pm 1$ に従って $\pm$ となる。よって $\det \eta_{ij} = \pm 1 = \eta$ として

$$\begin{aligned}*\theta^i \wedge *\omega &= \eta\varepsilon_{ip+1\cdots n1\underset{\hat{i}}{\cdots}p}\eta^{ii}\theta^1 \wedge \overset{\overset{i}{\vee}}{\cdots} \wedge \theta^p \\ &= \eta(-1)^{np+n+i-1}\eta^{ii}\theta^1 \wedge \overset{\overset{i}{\vee}}{\cdots} \wedge \theta^p \\ &= \eta(-1)^{np+n}i_{\theta^i}\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p \\ &= \eta(-1)^{np+n}i_{\theta^i}\omega\end{aligned}$$

となる。これは明らかに ω の一般的な場合にも成り立つ。従って

$$i_{\theta^i} = \eta(-1)^{np+n} * \theta^i \wedge *$$

よって局所基底として $\nabla^{TM}e_i = 0$ なるものを選べば、上述の d の表示より（今は計量 η_{ij} は定数となることに注意して）

$$\begin{aligned}i_{\theta^i}\nabla^{TM^*}_{e_i} &= \eta(-1)^{np+n} * \theta^i \wedge \nabla^{TM^*}_{e_i} * \\ &= -\eta(-1)^{np+n+1} * d*\end{aligned}$$

となり、よって

$$\delta = -i_{\theta^i}\nabla^{TM^*}_{e_i}$$

が得られる（δ の定義は"トポロジー"note 参照）。

曲率について、レビ・チビタ接続の場合もう少しのことが言える。曲率 Ω を

$$\Omega_{ij} = \sum_{k<l} R_{ijkl}\theta^k \wedge \theta^l$$

と書き、R_{ijkl} を曲率の成分という。これは $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ となる。この時、

$$\begin{aligned}\Omega \wedge \theta &= (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \theta \\ &= d\omega \wedge \theta + \omega \wedge \omega \wedge \theta \\ &= d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta \\ &= d(\omega \wedge \theta) \\ &= -d(d\theta) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。あるいは

$$\Omega_{ij} \wedge \theta^j = 0$$

と書ける。これは直接書けば

$$\frac{1}{2}R_{ijkl}\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l = 0$$

よって成分をそろえて

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$$

を得る。これを Bianchi の第 1 恒等式という。$\eta = \pm\delta$ の場合には $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ であるが、一般的には反対称にはならず、$\eta_{im}R_{mnkl}\eta_{nj} = -R_{jikl}$ となる。

また

$$R_{jk} = \sum_i R_{ijik}$$

と置いて

$$\mathrm{Ric} = R_{jk}\theta^j \otimes \theta^k$$

を Ricci 曲率という。さらに $\eta_{ij}R_{ji} = R$ をスカラー曲率という。

7 特性類

多様体 M 上のベクトル束 E に対し、$A \in \Gamma(\mathrm{End}(E))$、$\omega \in \Gamma(\overset{p}{\wedge}TM^*)$ とする時、tr を

$$\mathrm{tr}\omega A = \omega \mathrm{tr} A$$

で定義する。

さらに $A, B \in \Gamma(\mathrm{End}(E))$、$\omega, \eta$ をそれぞれ p-form、q-form とする時、交換子を

$$[\omega A, \eta B] = \omega A \wedge \eta B - (-1)^{pq}\eta B \wedge \omega A$$

で定義する。$A, B \in \Gamma(\mathrm{End}(E) \otimes \overset{*}{\wedge}TM^*)$ とすれば

$$\mathrm{tr}[A, B] = 0$$

となる。

この時 $A \in \Gamma(\mathrm{End}(E) \otimes \overset{p}{\wedge}TM^*)$ に対し、接続形式を ω とすると

$$\begin{aligned} d\mathrm{tr}A &= \mathrm{tr}(dA + [\omega, A]) \\ &= \mathrm{tr}(dA + \omega \wedge A - (-1)^p A \wedge \omega) \\ &= \mathrm{tr}\nabla^E A \\ &= \mathrm{tr}[\nabla^E, A] \end{aligned}$$

となる。

関数 f を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

とする時、$f(\Omega)$ を考える。ここで Ω は曲率形式である。この時次の 2 つのことが成り立つ。

1)

$$d\mathrm{tr} f(\Omega) = 0$$

2) ∇^0, ∇^1 を E 上の 2 つの異なる接続であるとし、Ω_0, Ω_1 をそれぞれの曲率形式とする。この時、ある $\omega \in \Gamma(\overset{*}{\wedge}TM^*)$ が存在し、

$$\mathrm{tr}[f(\Omega_0)] - \mathrm{tr}[f(\Omega_1)] = d\omega$$

となる。

1) は ∇ がライプニッツ則に従うことから、自明。

2) は、まず

$$\nabla_t = (1-t)\nabla^0 + t\nabla^1$$

と置く。これは明らかに接続となる。∇_t の曲率形式を Ω_t と置く。よって $\frac{d\nabla_t}{dt} = \nabla^1 - \nabla^0 \in \Gamma(\mathrm{End}(E) \otimes \wedge TM^*)$ となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{tr}[f(\Omega_t)] &= \mathrm{tr}\left[\frac{d\Omega_t}{dt}\acute{f}(\Omega_t)\right] \\ &= \mathrm{tr}\left[\left[\nabla_t, \frac{d\nabla_t}{dt}\right]\acute{f}(\Omega_t)\right] \\ &= \mathrm{tr}\left[\left[\nabla_t, \frac{d\nabla_t}{dt}\acute{f}(\Omega_t)\right]\right] \\ &= d\mathrm{tr}\left[\frac{d\nabla_t}{dt}\acute{f}(\Omega_t)\right] \end{aligned}$$

2 段目の等式は、接続形式が t に依存する一般的な場合を考えて（即ち $\nabla_t = d + \omega_t$）

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_t}{dt} &= d\acute{\omega} + \acute{\omega} \wedge \omega + \omega \wedge \acute{\omega} \\ &= [\nabla_t, \acute{\omega_t}] \\ &= [\nabla_t, \frac{d\nabla_t}{dt}] \end{aligned}$$

となることから（$\acute{}$ は t の微分を意味する）。最後から 2 段目の等式は Bianchi の恒等式より。よって、これを t で積分すれば

$$\mathrm{tr}[f(\Omega_0)] - \mathrm{tr}[f(\Omega_1)] = -d\int_0^1 \mathrm{tr}\left[\frac{d\nabla_t}{dt}\acute{f}(\Omega_t)\right]dt$$

となり、示された。この時

$$-\int_0^1 \mathrm{tr}\left[\frac{d\nabla_t}{dt}\acute{f}(\Omega_t)\right]dt$$

を Chern-Simons term という。多くの場合において、これは閉形式となることが知られている。即ちコホモロジー類を定義する。

（例として M をコンパクトで向きのついた 3 次元多様体とする。ベクトル束として TM を考える。接続 ∇^0 を TM の自明な接続、即ち $\nabla^0 = d$、∇^1 は TM の任意の接続で、$\nabla^1 = d + \omega$ とする。よって $\nabla_t = d + t\omega$ である。また $f(x) = -x^2$ とする。この時 Chern-Simons term は（K と書く）

$$\begin{aligned} K &= 2\int_0^1 \mathrm{tr}\left[\omega\wedge(d\omega t + \omega\wedge\omega t^2)\right]dt \\ &= \mathrm{tr}\left[\omega\wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega\wedge\omega\wedge\omega\right] \end{aligned}$$

となる。これを Chern-Simons 形式という。これは 3-form なのでもちろん閉形式である。

M の次元が $n(\geq 4)$ 次のベクトル束 E の場合にも全く同じように Chern-Simons 形式を定義でき、dK は、

$$dK = \mathrm{tr}\Omega\wedge\Omega$$

となる。これはもちろん直接計算でも確かめられる。それは読者への演習としておこう（$\mathrm{tr}[\omega\wedge\omega\wedge\omega\wedge\omega] = 0$ に注意すれば難しくないと思う）。この関係式は場の量子論でのインスタントンに関係してくる。また、$\mathrm{tr}\Omega\wedge\Omega$ はベクトル束の計量が $\eta = \delta$ の場合には（場の理論なんかではそうである）、後に出てくる第 1Pontrjagin 形式や第 2Chern 形式、または第 2Chern 指標の定数倍である。また、これはアノマリーとの関係もある。さらにこれは flat な 4 次元スピン多様体の場合の指数定理にも表れ、ディラック作用素の指数が、第 2Chern 指標の M 上の積分に等しくなる。ディラック作用素の指数は整数なので、よってその場合には整数となるのである（”クリフォード代数” note 参照)。）

以上により $f(\Omega)$ は M 上のコホモロジー類を定義することが分かる。

次に ω を p-form 閉形式とする。この時

$$\begin{aligned} df(\omega) &= a_1 d\omega + a_2(d\omega\wedge\omega + (-1)^p\omega\wedge d\omega) + \cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、$f(\omega)$ も閉形式となる。よって $\mathrm{tr}f(\Omega)$ の関数も閉形式である。

$\mathrm{tr}f(\Omega)$ を特性形式という。また、そのコホモロジー類を特性類という。

次に $\det e^{f(\Omega)}$ を考える。一般に行列 A に対し $\det e^A = e^{\mathrm{tr}A}$ となるので、$\det e^{f(\Omega)} = e^{\mathrm{tr}f(\Omega)}$ より、閉形式になる。さらに上記 2) より

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{tr}f(\Omega_0)} &= e^{\mathrm{tr}f(\Omega_1)}e^{d\omega} \\ &= e^{\mathrm{tr}f(\Omega_1)} + d\omega\wedge e^{\mathrm{tr}f(\Omega_1)} \\ &\quad + \frac{1}{2!}d\omega\wedge d\omega\wedge e^{\mathrm{tr}f(\Omega_1)} + \cdots \\ &= e^{\mathrm{tr}f(\Omega_1)} + d\big(\omega\wedge e^{\mathrm{tr}f(\Omega_1)} \\ &\quad + \frac{1}{2!}\omega\wedge d\omega\wedge e^{\mathrm{tr}f(\Omega_1)} + \cdots\big) \end{aligned}$$

となるので $e^{\mathrm{tr}f(\Omega)}$ も接続の取り方によらず、コホモロジー類を定義することが分かる。この場合にも $\det e^{f(\Omega)}$ を特性形式、そのコホモロジー類を特性類という。

上記のことを踏まえて以下にいくつかの特性形式、特性類を定義する。

まず、複素ベクトル束 E に対して

$$\begin{aligned} c(E,\nabla^E) &:= \det\left(1 - \frac{\Omega}{2\pi i}\right) \\ &= 1 + c_1(E,\nabla^E) + c_2(E,\nabla^E) + \cdots \\ &\quad \cdots + c_r(E,\nabla^E) \end{aligned}$$

を全 Chern 形式という。ここで $c_i(E,\nabla^E)$ は 2i 次微分形式である。$c_i(E,\nabla^E)$ を第 i Chern 形式という。これらのコホモロジー類を順に、全 Chern 類、第 i Chern 類といい、それぞれ $c(E)$、$c_i(E)$ と書く。ここで E が内積を持つとする。計量を η とし、計量 η を保つ接続 ∇^E を取れば接続形式 ω は $\eta\omega^*\eta = -\omega^t$ であるので（* は複素共役の意味)、$\eta\Omega^*\eta = -\Omega^t$ と

なり、よって

$$\begin{aligned} c(E,\nabla^E) &= \det\left(1-\frac{\Omega}{2\pi i}\right) \\ &= \det\left(1-\frac{\Omega}{2\pi i}\right)^t \\ &= \det\left[\eta\left(1+\frac{\Omega^*}{2\pi i}\right)\eta\right] \\ &= \det\left(1-\frac{\Omega}{2\pi i}\right)^* \\ &= c(E,\nabla^E)^* \end{aligned}$$

となり、$c(E,\nabla^E)$ は実微分形式であることが分かる。

次に複素ベクトル束 E に対して

$$\begin{aligned} ch(E,\nabla^E) &= \operatorname{tr}\exp\left(-\frac{\Omega}{2\pi i}\right) \\ &= 1+ch_1(E,\nabla^E) \\ &\qquad +ch_2(E,\nabla^E)+\cdots \\ ch_k(E,\nabla^E) &= \frac{1}{k!}\operatorname{tr}\left[\left(-\frac{\Omega}{2\pi i}\right)^k\right] \end{aligned}$$

とする時、$ch(E,\nabla^E)$ の定めるコホモロジー類を Chern 指標という。また $ch_i(E,\nabla^E)$ を第 iChern 指標と呼ぶことにする。

次は実ベクトル束 E に対して、

$$p(E,\nabla^E) := \det\left(1-\frac{\Omega}{2\pi}\right)$$

を全 Pontrjagin 形式といい、そのコホモロジー類を $p(E)$ と書き、Pontrjagin 類という。ここでも内積を定義し、計量 η を保つ接続を取れば、$\eta\Omega^t\eta=-\Omega$ より

$$\begin{aligned} \det\left(1-\frac{\Omega}{2\pi}\right) &= \det\eta\left(1+\frac{\Omega^t}{2\pi}\right)\eta \\ &= \det\left(1+\frac{\Omega}{2\pi}\right)^t \\ &= \det\left(1+\frac{\Omega}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

よって、$p(E,\nabla^E)$ は Ω の遇関数である。

$$p(E,\nabla^E)=1+p_1(E,\nabla^E)+p_2(E,\nabla^E)+\cdots$$

とした時、$p_i(E,\nabla^E)$（4i 次微分形式である）を第 i Pontrjagin 形式といい、それの定めるコホモロジー類を第 i Pontrjagin 類といい、$p_i(E)$ と書く。Pontrjagin 類と Chern 類の間には、$E\otimes\mathbb{C}$ を E の複素化とした時

$$p_i(E)=(-1)^i c_{2i}(E\otimes\mathbb{C})$$

なる関係がある。

$$\tilde{p}(E,\nabla^E)=\operatorname{tr}\exp\left(\frac{-\Omega}{2\pi}\right)$$

の定めるコホモロジー類を Pontrjagin 指標という。これも Pontrjagin 形式の時と同様 Ω の遇関数なので、Ω の偶数次だけを考えたらよい。

次に向きのついた内積を持つ実ベクトル束 E で、そのファイバー V の次元が $r=2m$ である場合。向きが付いてるので構造群を SO(V) に落とせる。曲率を Ω とすると、$\Omega\eta=-(\Omega\eta)^t$ なので $\Omega_{im}\eta_{mj}=B_{ij}$ と置けば、B は反対称な 2-form である。B_{ij} を $\overset{2}{\wedge}E$ の 2-form の切断の成分とみなす。即ち E の局所正規直交基を e_i と書けば

$$B=\frac{1}{2}B_{ij}e_i\wedge e_j$$

と置く。この B に対しても Bianchi の恒等式が成立することに注意。実際

$$\begin{aligned} [\nabla^E,B] &= dB+\omega\wedge B+B\wedge\omega^t \\ &= dB+\omega\wedge B+\Omega\eta\wedge\omega^t \\ &= d\Omega\eta+\omega\wedge\Omega\eta-\Omega\wedge\omega\eta \\ &= [\nabla^E,\Omega]\eta \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。この時

$$\begin{aligned} B^m &= B\wedge B\wedge\cdots\wedge B \quad (m \text{ 個}) \\ &= \frac{1}{2^m}\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_{2m-1}i_{2m}}B_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge B_{i_{2m-1}i_{2m}} \\ &\qquad e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_{2m-1}\wedge e_{2m} \end{aligned}$$

となる。

$$\mathrm{P}(B) := \frac{1}{2^m}\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_{2m-1} i_{2m}} B_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge B_{i_{2m-1} i_{2m}}$$

と置き、

$$e(E, \nabla^E) = \frac{1}{(2\pi)^m m!}\mathrm{P}(B)$$

を Euler 形式という（$\mathrm{Pf}(B) := \frac{1}{m!}\mathrm{P}(B)$ をパッフィアンという）。これが閉形式であることは次のように考えれば分かる。まず、$\mathrm{P}(B)$ は局所正規直交基を $\acute{e}_i = e_j \alpha_{ji},\ \alpha \in \mathrm{SO}(V)$ に変えた時、B の成分は $\acute{B}_{i_1 i_2} = B_{j_1 j_2}\alpha_{i_1 j_1}\alpha_{i_2 j_2}$ と変換するので

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 \dots} \acute{B}_{i_1 i_2} \wedge \acute{B}_{i_3 i_4} \wedge \cdots \\
&= \det\alpha\ \varepsilon_{j_1 j_2 \dots} B_{j_1 j_2} \wedge \cdots \\
&= \varepsilon_{j_1 j_2 \dots} B_{j_1 j_2} \wedge \cdots
\end{aligned}$$

となり、不変である。次に B は $\alpha_t^{-1} := e^{-tS} \in \mathrm{SO}(V)$ による座標変換のもとで $B_t = \alpha_t B \alpha_t^t$ と変換するので、$\frac{dB_t}{dt} = SB_t + B_t S^t$ となる。よって

$$\begin{aligned}
&2^m \frac{d}{dt}\mathrm{P}(B_t) \\
&= \varepsilon_{i_1 i_2 \dots}(\frac{dB_t}{dt})_{i_1 i_2} \wedge \cdots + \cdots \\
&= \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 \dots}(SB_t)_{i_1 i_2} \wedge (B_t)_{i_3 i_4} \wedge \cdots \\
&\quad + \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 \dots}(B_t S^t)_{i_1 i_2} \wedge (B_t)_{i_3 i_4} \wedge \cdots \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

のような形になるが、$\mathrm{P}(B_t)$ が t によらないので、これは 0 になる。$S \in \mathfrak{so}(V)$ は任意なので、S の代わりに $\mathfrak{so}(V)$ 値 1-form の接続形式であってもこれが 0 であるのに変わりはない。よって（煩雑にならないために、添え字を省略して書く）Bianchi の恒等式より

$$\begin{aligned}
0 &= \varepsilon(\omega \wedge B_t) \wedge B_t \cdots + \varepsilon(B_t \wedge \omega^t) \wedge B_t \cdots + \cdots \\
&= -\varepsilon(dB_t) \wedge B_t \cdots + \cdots \\
&= -d(\varepsilon B_t \wedge B_t \cdots + \cdots) \\
&= -2^m d\mathrm{P}(B)
\end{aligned}$$

となることから $e(E, \nabla^E)$ が閉形式であることが分かる。さらに、これが接続の取り方によらないことは、前と同じように異なる接続 ∇^0、∇^1 に対して、∇_t、Ω_t 、それに対する B_t（さっきの B_t とは違うことに注意）を定義すれば、

$$\begin{aligned}
\frac{dB_t}{dt} &= \frac{d\Omega_t}{dt}\eta \\
&= [\nabla_t, \frac{d\nabla_t}{dt}]\eta
\end{aligned}$$

に注意して（接続と計量の積 $\omega\eta$ が反対称であることに注意して、また上と同様の議論が以下でも成り立つことに注意して）

$$\begin{aligned}
2^m \frac{d}{dt}\mathrm{P}(B_t) &= \varepsilon_{ijkl\cdots}\frac{dB_{ij}}{dt} \wedge \cdots + \cdots \\
&= \varepsilon_{ijkl\cdots}[\nabla_t, \frac{d\nabla_t}{dt}]_{im}\eta_{mj} \wedge \cdots + \cdots \\
&= \nabla_t\left(\varepsilon_{ijkl\cdots}(\frac{d\nabla_t}{dt})_{im}\eta_{mj} \wedge \cdots + \cdots\right) \\
&= d\left(\varepsilon_{ijkl\cdots}(\frac{d\nabla_t}{dt})_{im}\eta_{mj} \wedge \cdots + \cdots\right)
\end{aligned}$$

となるので Euler 形式も接続によらないコホモロジー類を定義することが分かる。Euler 形式のコホモロジー類を Euler 類といい、$e(E)$ と書く。

次に、接ベクトル束 TM に対して、接続を ∇^{TM}、曲率を Ω^{TM} と書くと

$$L(TM, \nabla^{TM}) := \det\left(\left(\frac{\frac{i}{2\pi}\Omega^{TM}}{\tanh(\frac{i}{2\pi}\Omega^{TM})}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

を L 形式といい、これの定めるコホモロジー類を L 類といい、$L(TM)$ と書く。また、

$$L(M) := \int_M L(TM, \nabla^{TM})$$

を L 種数という。ここで積分は $\dim M$ に等しい次数の形式だけを積分しているものとする。よって奇数次元では 0 である。

次に

$$A(TM, \nabla^{TM}) := \det\left(\left(\frac{\frac{i}{4\pi}\Omega^{TM}}{\sinh(\frac{i}{4\pi}\Omega^{TM})}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

を A 形式といい、その定めるコホモロジー類を A 類といい、$A(TM)$ と書く。また、

$$A(M) := \int_M A(TM, \nabla^{TM})$$

を A 種数という。これも $\dim M$ に等しい次数の形式だけを積分しているものとする。よって奇数次元では 0 である。

A 付録

特性類のところで使った行列の関係式について

$$\det e^A = e^{\mathrm{tr}A}$$

の証明。t を実数とし、$\det e^{tA}$ の差分を取ると

$$\begin{aligned}\det e^{(t+\Delta t)A} - \det e^{tA} &= \left(\det e^{\Delta tA} - 1\right)\det e^{tA} \\ &= \Delta t\left(\mathrm{tr}A + \mathcal{O}(\Delta t)\right)\det e^{tA}\end{aligned}$$

よって、これを Δt で割り、$\Delta t \to 0$ の極限を取れば、微分方程式

$$\frac{d}{dt}\det e^{tA} = \mathrm{tr}A \det e^{tA}$$

を得る。よって

$$\det e^{tA} = e^{t\mathrm{tr}A}$$

特に $t = 1$ と置けば、証明したいことが示される。

次に第 iChern 形式や第 iPontrjagin 形式を具体的に計算するのに必要な計算をする。まず

$$\begin{aligned}\det(1-A) &= \det e^{\log(1-A)} \\ &= \det e^{-\left(A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}+\cdots\right)} \\ &= e^{-\mathrm{tr}\left(A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}+\cdots\right)} \\ &= -\mathrm{tr}A + \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2\right) + \cdots\end{aligned}$$

などとなる。これにより $A = \frac{\Omega}{2\pi i}$ または $A = \frac{\Omega}{2\pi}$ と置いて計算出来る。特にベクトル束の計量が $\eta = \delta$、即ち成分が 1 の場合には曲率形式は反対称行列となるので、$\mathrm{tr}\Omega = 0$ となる。よって特に第 2Chern 類、第 2Pontrjagin 類は

$$\begin{aligned}c_2(E, \nabla^E) &= \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\Omega\wedge\Omega \\ p_1(E, \nabla^E) &= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\Omega\wedge\Omega\end{aligned}$$

となる。