場の量子論における粒子の崩壊の計算

TKG

2026 年 2 月 17 日

1 INTRODUCTION

このノートでは場の量子論ノートであまり詳しく立ち入らなかった粒子の崩壊に関して議論する。場の量子論ではどのように粒子の崩壊が扱われるのかを理解することの助けとなるような簡単な 3 点相互作用のモデルで計算する。簡単な繰り込みの計算を行って、粒子の質量の量子補正に虚部が現れることを見る。場の量子論ノートでは質量の量子補正に虚部が現れると粒子が崩壊することを説明していた。虚部を具体的に計算することにより、粒子の半減期を具体的に与える。

2 場の量子論 - 3 点相互作用の計算

質量 m のスカラー場と質量 M のスカラー場の 2 種類からなるモデルを考える。ラグラジアンは以下のように 3 点の相互作用のみがあるものとする。即ち

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi_0)^2 - \frac{1}{2}(\partial\chi_0)^2 - \frac{1}{2}M_0^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_0^2\chi_0^2 + \frac{1}{2}g_0\phi_0\chi_0^2 \tag{1}$$

とする。ここで各パラメータは裸の量に対して下付きの添え字 0 がついている。ϕ 粒子の質量が M で χ 粒子の質量が m であり、$M > m$ であるとする。さっそく繰り込みの計算を行っていく。裸の量と繰り込まれた量との間の関係は以下の通り。

$$\begin{aligned}
&\phi_0 = Z_1^{\frac{1}{2}}\phi, \qquad Z_1 = 1 + \delta_{Z_1} \\
&\chi_0 = Z_2^{\frac{1}{2}}\chi, \qquad Z_2 = 1 + \delta_{Z_2} \\
&M_0^2 Z_1 = M^2 + \delta_M, \qquad m_0^2 Z_2 = M^2 + \delta_m \\
&g_0 Z_1^{\frac{1}{2}} Z_2 = g\mu^{2-\frac{n}{2}} + \delta_g\mu^{2-\frac{n}{2}}
\end{aligned} \tag{2}$$

これを用いてカウンター項を書き出すと

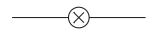
$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 - \frac{1}{2}m^2\chi^2 + \frac{1}{2}g\phi\chi^2 \\
&- \frac{1}{2}\delta_{Z_1}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}\delta_M\phi^2 - \frac{1}{2}\delta_m\chi^2 + \frac{1}{2}\delta_g\mu^{2-\frac{n}{2}}\phi\chi^2
\end{aligned} \tag{3}$$

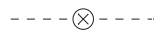
となる。以下で繰込みの計算を行う。繰込み条件は場の量子論ノートと同じオンシェル条件で次元正則化で繰込みを行う。ここでの主な目的は質量への繰込みを計算することである。また質量の量子補正により虚数部が生じて、粒子の半減期を実際に計算できることを見る。ついでに繰込み群方程式を導出する。ファインマンダイアグラムは

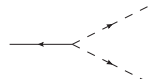
以下の通りである。ϕ 粒子を実線で表して、χ 粒子を点線で表すことにする。

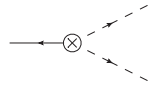
$$= \frac{1}{k^2+M^2} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{k^2+m^2} \tag{5}$$

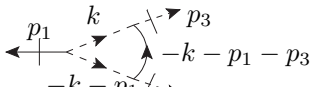

$$= -(\delta_{Z_1}k^2+\delta_M) \tag{6}$$


$$= -(\delta_{Z_2}k^2+\delta_m) \tag{7}$$


$$= g\mu^{2-\frac{n}{2}} \tag{8}$$

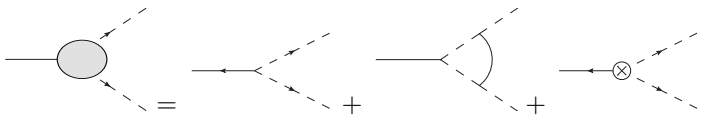

$$= \delta_g\mu^{2-\frac{n}{2}} \tag{9}$$

最初に 3 点頂点の繰込みから。これは質量の繰り込みとは関係がないが、このモデルでの繰り込みの計算を完全なものとするために行う。1-loop での 3 点頂点は



$$\begin{aligned}
&= (g\mu^{2-\frac{n}{2}})^3 \int \frac{\mathrm{d}_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2+m^2} \frac{1}{(k+p_1)^2+m^2} \frac{1}{(k+p_1+p_3)^2+M^2} \\
&= \frac{(g\mu^{2-\frac{n}{2}})^3}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \frac{1}{\left[-s\alpha^2-t\beta^2+m^2(1-\alpha-\beta)+(s+m^2)\alpha+(t+M^2)\beta\right]^{3-\frac{n}{2}}}
\end{aligned} \tag{10}$$

ここで外線の運動量 p_1、p_2、p_3 に対して $s=p_1^2$、$t=(p_1+p_3)^2$ と置いた。従って 3 点頂点は



$$\begin{aligned}
&= g\mu^{2-\frac{n}{2}} + \frac{(g\mu^{2-\frac{n}{2}})^3}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \frac{1}{\left[-s\alpha^2-t\beta^2+m^2(1-\alpha-\beta)+(s+m^2)\alpha+(t+M^2)\beta\right]^{3-\frac{n}{2}}} \\
&\quad + \delta_g\mu^{2-\frac{n}{2}}
\end{aligned} \tag{11}$$

となる。これを $\mathcal{M}(s,t)$ と置く。繰込み条件は場の量子論ノートと同じで $\mu=\mu_c$ で $g=g_c$ であるとして、ラグランジアンの 3 点の繰り込まれた結合定数を改めてこれらで置き直して計算して、エネルギースケール $\mu=\mu_c$ の時に $\mathcal{M}(s_c,t_c)=g_c\mu_c^{2-\frac{n}{2}}$ とすると δ_g が求まり、

$$\delta_g = -\frac{g_c^3\mu_c^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \frac{1}{\left[-s_c\alpha^2-t_c\beta^2+m_c^2(1-\alpha-\beta)+(s_c+m_c^2)\alpha+(t_c+M_c^2)\beta\right]^{3-\frac{n}{2}}} \tag{12}$$

ここで δ_g は $n=4$ で発散しない。従って最小引き算の繰込み条件であればこのカウンター項は 0 となる。$\mathcal{M}(s,t)$ を δ_g に上式を入れてまとめると

$$\mathcal{M}(s,t) = g_c\mu_c^{2-\frac{n}{2}} + -\frac{g_c^3\mu_c^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \left(\mu_c^{2-\frac{n}{2}} F(s,t) - \mu^{2-\frac{n}{2}} F(s_c,t_c)\right) \tag{13}$$

ここで

$$F(s,t) = \frac{1}{\left[-s\alpha^2-t\beta^2+m_c^2(1-\alpha-\beta)+(s+m_c^2)\alpha+(t+M_c^2)\beta\right]^{3-\frac{n}{2}}} \tag{14}$$

と置いた。

次に ϕ 粒子の 2 点頂点の計算をする。

$$\Sigma = \quad + \quad$$

$$= \frac{(g_c \mu_c^{2-\frac{n}{2}})^2}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \left[m_c^2 + k^2(\alpha-\alpha^2)\right]^{\frac{n}{2}-2} - \delta_{Z_1} k^2 - \delta_M \tag{15}$$

ここで同種粒子のループなので対称性の Factor$\frac{1}{2}$ が余分に付くことに注意されたい。繰り込み条件は

$$\Sigma(k)|_{k^2+M_c^2=0} = 0, \quad \left.\frac{d\Sigma(k)}{dk^2}\right|_{k^2+M_c^2=0} = 0 \tag{16}$$

なのでそれぞれを具体的に計算して δ_{Z_1} と δ_M を計算する。

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}k^2} = \frac{(g_c \mu_c^{2-\frac{n}{2}})^2}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\left(\frac{n}{2}-2\right)(\alpha-\alpha^2)}{\left[m_c^2 + k^2(\alpha-\alpha^2)\right]^{3-\frac{n}{2}}} - \delta_{Z_1} \tag{17}$$

より

$$\delta_{Z_1} = \frac{(g_c \mu_c^{2-\frac{n}{2}})^2}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\left(\frac{n}{2}-2\right)(\alpha-\alpha^2)}{\left[m_c^2 - M_c^2(\alpha-\alpha^2)\right]^{3-\frac{n}{2}}} \tag{18}$$

従って $\Sigma(-M_c^2) = 0$ より

$$\delta_M = \frac{(g_c \mu_c^{2-\frac{n}{2}})^2}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \left(\left[m_c^2 - M_c^2(\alpha-\alpha^2)\right]^{\frac{n}{2}-2} + \frac{\left(\frac{n}{2}-2\right)(\alpha-\alpha^2)M_c^2}{\left[m_c^2 - M_c^2(\alpha-\alpha^2)\right]^{3-\frac{n}{2}}} \right) \tag{19}$$

従って 2 点頂点は

$$\Sigma(k^2) = \frac{(g_c \mu_c^{2-\frac{n}{2}})^2}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \left(\left[m_c^2 + k^2(\alpha-\alpha^2)\right]^{\frac{n}{2}-2} - \left[m_c^2 - M_c^2(\alpha-\alpha^2)\right]^{\frac{n}{2}-2} - \frac{\left(\frac{n}{2}-2\right)(\alpha-\alpha^2)(k^2+M_c^2)}{\left[m_c^2 - M_c^2(\alpha-\alpha^2)\right]^{3-\frac{n}{2}}} \right) \tag{20}$$

となる。2 点頂点の $n=4$ まわりでの振る舞いを調べる

$$\begin{aligned}\Sigma(k^2) &= \frac{g_c^2}{2(4\pi)^2}(1+(4-n)\ln\mu+\cdots)\left(1+\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln(4\pi)+\cdots\right)\left(\frac{2}{4-n}-\gamma+\cdots\right) \\ &\qquad \times \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \left[\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\ln\left[\frac{m_c^2+k^2(\alpha-\alpha^2)}{m_c^2-M_c^2(\alpha-\alpha^2)}\right] - \frac{(k^2+M_c^2)(\alpha-\alpha^2)}{m_c^2-M_c^2(\alpha-\alpha^2)}\right)+\cdots\right] \\ &= -\frac{g_c^2}{2(4\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \left(\ln\left[\frac{m_c^2+k^2(\alpha-\alpha^2)}{m_c^2-M_c^2(\alpha-\alpha^2)}\right] - \frac{(k^2+M_c^2)(\alpha-\alpha^2)}{m_c^2-M_c^2(\alpha-\alpha^2)}+\cdots\right)\end{aligned} \tag{21}$$

さらに α での積分を行っていく。$\alpha = \frac{1+t}{2}$ と置き換えると

$$\Sigma(k^2) = -\frac{g_c^2}{4(4\pi)^2}\int_{-1}^1 \mathrm{d}t \left(\ln\left[\frac{4m_c^2+k^2-k^2t^2}{4m_c^2-M_c^2+M_c^2t^2}\right] - \frac{(k^2+m_c^2)(1-t^2)}{4m_c^2-M_c^2+M_c^2t^2)}\right) \tag{22}$$

となる。第一項の積分は積分

$$F = \int_{-1}^1 \mathrm{d}t \ln\left(A+Bt^2\right) \tag{23}$$

を計算すると良い。

$$
\begin{aligned}
F &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \left(\ln(\sqrt{A} + i\sqrt{B}t) + \ln(\sqrt{A} - i\sqrt{B}t) \right) \\
&= \left[\left(\frac{1}{i\sqrt{B}} (\sqrt{A} + i\sqrt{B}t) \ln(\sqrt{A} + i\sqrt{B}t) - t \right) + \left(\frac{1}{-i\sqrt{B}} (\sqrt{A} - i\sqrt{B}t) \ln(\sqrt{A} - i\sqrt{B}t) - t \right) \right] \Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{i\sqrt{B}} (\sqrt{A} + i\sqrt{B}) \ln(\sqrt{A} + i\sqrt{B}) - \frac{2}{i\sqrt{B}} (\sqrt{A} - i\sqrt{B}) \ln(\sqrt{A} - i\sqrt{B}) - 4 \\
&= -2i\sqrt{\frac{A}{B}} \ln \left(\frac{\sqrt{A} + i\sqrt{B}}{\sqrt{A} - i\sqrt{B}} \right) + 2\ln(A + B) - 4
\end{aligned} \tag{24}
$$

ここで複素数 $z = re^{i\theta}$ に対して

$$
\ln \left(\frac{z}{\bar{z}} \right) = 2i\theta \tag{25}
$$

であるので A と B が共に正の実数であるならば

$$
F = 4\sqrt{\frac{A}{B}} \arctan \left(\sqrt{\frac{B}{A}} \right) + 2\ln(A + B) - 4 \tag{26}
$$

となる。分子の方に着目すると $A = 4m_c^2 + k^2$、$B = -k^2$ であるので

$$
F = 2\beta_1 \ln \left(\frac{\beta_1 + 1}{\beta_1 - 1} \right) + 2\ln(4m_c^2) - 4, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{4m_c^2}{|k|^2} + 1} \quad (k^2 > 0) \tag{27}
$$

$$
= 4\alpha \arctan \left(\frac{1}{\alpha} \right) + 2\ln(4m_c^2) - 4, \quad \alpha = \sqrt{\frac{4m_c^2}{s} - 1} \quad (s = -k^2,\ 4m_c^2 > s > 0) \tag{28}
$$

$$
= 2\beta \ln \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right) + 2\ln(4m_c^2) - 4 \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}}, \quad (s = -k^2,\ s > 4m_c^2) \tag{29}
$$

となる。ここで 3 行目の等式に関しては $\beta < 1$ であるのでさらに

$$
F = 2\beta \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) + 2\ln(4m_c^2) - 4 - 2\pi i\beta \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}}, \quad (s = -k^2,\ s > 4m_c^2) \tag{30}
$$

となる。即ち質量の量子補正に虚数が生じる。ここで偏角から生じた虚数部分には $\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi)$ のような不定性があるようにも思われるが、運動量空間でのプロパゲータの分母にはこれまで省略していたが $k^2 + m_c^2 - i\varepsilon$ のように微小な負の純虚数を付加しておいて、最終的に $\varepsilon \to 0$ をとるものとして定義している。これを踏まえると (29) 式の β には $+i\varepsilon'$ のようにわずかに正の純虚数が付加される。従って $\ln(\beta - 1 + i\varepsilon') = \ln(1 - \beta) + i\pi$ となる。以上のことから質量の量子補正には $s > 4m_c^2$ の時に

$$
i\frac{g_c^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}} \tag{31}
$$

のように虚数が現れる。場の量子論ノートと照らし合わせると運動量空間のプロパゲータは $k^2 + M_c^2 = 0$ の付近では

$$
\begin{aligned}
G(k) &= \frac{1}{k^2 + M_c^2 - iM_c\Gamma} \\
&= \frac{1}{k^2 + M_c^2 - i\frac{g^2}{32\pi}\sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{M_c^2}}}
\end{aligned} \tag{32}
$$

となることが分かる。即ち ϕ 粒子は質量が $M_c^2 > 4m_c^2$ の時、即ち χ 粒子 2 つ分の質量より大きい時 χ 粒子に崩壊する。静止系での半減期は

$$\tau = \frac{32\pi M_c}{g^2\sqrt{1-\frac{4m_c^2}{M_c^2}}} \tag{33}$$

として求まる。

ここで (22) 式の積分の中の第一項の分母の方からも虚数が出てきそうであるが、ここには実際には虚数が含まれない。この項は質量のカウンター項 δ_M から生じる項であるが、M_0^2 と M_c^2 が実数であるように定義しているので δ_M もまた実数であるように定義しないといけない。従って正しくは δ_M は (19) 式の右辺の実部として定義しないといけないことが分かる。(22) 式の第二項目も同様である。従って (22) 式には虚部は上で計算した第一項目の分子からの寄与のみになる。

繰り込み群方程式を求めてみる。まずは結合定数から見ていこう、$g_0 Z_1^{\frac{1}{2}} Z_2 = g\mu^{2-\frac{n}{2}} + \delta_g \mu^{2-\frac{n}{2}}$ を μ で微分すると左辺は μ に依存しないのでまとめると

$$\mu\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu} = (n-4)\frac{g+\delta_g}{2} \tag{34}$$

となる。δ_g は $n=4$ で発散しないので $n=4$ では右辺は 0 となる。質量の方を見ていこう。質量のカウンター項は $n=4$ の付近では

$$\delta_M = -\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4} + \cdots \tag{35}$$

なので

$$M_0^2 Z_1 = M^2 - \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4} + \cdots \tag{36}$$

同様に μ で微分すると、左辺は μ に依存しないことからまとめると

$$\begin{aligned}\mu\frac{\mathrm{d}M^2}{\mathrm{d}\mu} &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\mu\frac{\mathrm{d}g^2}{\mathrm{d}\mu} \\ &= \frac{1}{16\pi^2}(g^2+\delta_g g)\end{aligned} \tag{37}$$

$n=4$ では結合定数は μ に依存しなかったので右辺は定数である。従って M^2 はこのオーダーで

$$M^2 = M_c^2 + \frac{1}{16\pi^2}(g_c^2+\delta_g g_c)\ln\left(\frac{\mu}{\mu_c}\right) \tag{38}$$

となる。

ここで場の量子論ノートによると一般的な散乱の微分断面積は散乱振幅

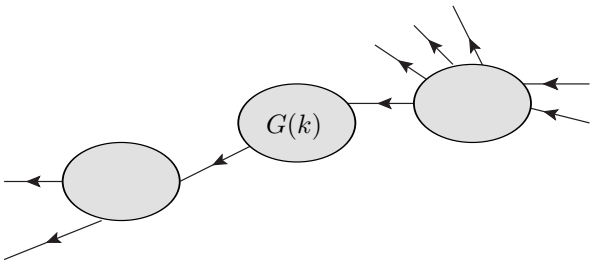
$$\langle \mathbf{p}_f|T|\mathbf{p}_i\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i) \tag{39}$$

に対して

$$d\sigma_i = \frac{1}{J}\sum_{f_1,f_2,\cdots}\left[\prod_\alpha \frac{1}{N_\alpha!}\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)|\mathcal{M}(p_f-p_i)|^2 \tag{40}$$

により与えられた。散乱振幅は入射粒子と散乱粒子の一般的な相互作用を表しており、対応する様々な Feynman ダ

イアグラムの和となる。

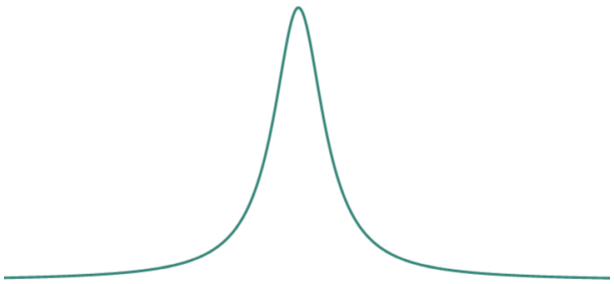


(41)

散乱振幅の中にはグラフの中に 2 点頂点を部分グラフに含むものがある。従って微分断面積は (32) の二乗に比例する項が現れる。即ち

$$|G(k)|^2 = \frac{1}{(k^2 + M_c^2)^2 + M_c^2\Gamma^2} \tag{42}$$

に比例する項が現れる。これは $-k^2 = M_c^2$ でピークを持つ下図のような形となる。



(43)

即ちエネルギーが粒子の質量の位置にピークができる。これを**共鳴**という。