熱伝導方程式からエントロピー増大則を導く

TKG

2025年3月13日

このノートの目的は熱伝導方程式と熱力学の基本的な関係式を用いてエントロピーの増大則を導けないかを考察することです。

熱伝導方程式は

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{x}^2} \quad (1)$$

で与えられます。また系の温度 T と熱エネルギー Q の変化の関係は

$$\Delta Q = C_v \Delta T \quad (2)$$

で与えられます。さらに系のエントロピー S の変化は熱エネルギー Q との関係

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (3)$$

で与えられます。

これらを用いて系全体のエントロピー S の時間変化は

$$\frac{\partial S}{\partial t} = C_v \int_D * \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (4)$$

で与えられますが、これが正 $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$ であることが示されれば系全体のエントロピーが減少しないことが示されたことになります。ここで積分範囲の D は系全体からなる領域を表します。

この積分 (4) は熱伝導方程式 (1) を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= C_v \int_D * \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \\ &= \lambda \int_D * \frac{1}{T} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{x}^2} \right) \\ &= \lambda \int_D \frac{1}{T} d * dT \\ &= \lambda \int_D d \left(\frac{1}{T} \wedge * dT \right) + \lambda \int_D \frac{1}{T^2} dT \wedge * dT \\ &= \lambda \int_{\partial D} * J + \lambda \int_D \frac{1}{T^2} dT \wedge * dT \end{aligned} \quad (5)$$

となります。ここで J は

$$J = \frac{1}{T} dT \quad (6)$$

なる 1-form を表します。系が閉じているならば ∂D の内側と外側とで熱のやり取りがないので、 D の表面付近では近似的に温度変化がないとみなせるので（そうでないと熱が D の外側に向かって流れていく、または内側へ流れてくることになり、 D の内側と外側とで熱のやり取りがないことに矛盾する）、

$$\int_{\partial D} *J = 0 \quad (7)$$

なので、

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda \int_D \frac{1}{T^2} dT \wedge *dT \geq 0 \quad (8)$$

となり系全体のエントロピーが減少しないことが示されました。