

幾何の話 3

TKG

2026 年 9 月 20 日

目次

1	INTRODUCTION	1
2	ユークリッド空間の中の超曲面を扱う	1
3	曲がった空間を考察する	13

1 INTRODUCTION

この note では”幾何のお話 2” ノート [1] の続編となる、一般的な次元をもつ空間の幾何学を取り上げます。この note では物理学における一般相対性理論で扱う幾何学的な概念や数学の理解、それと曲がった空間の幾何学のイメージを掴むこと、またそこで現れる各数学的対象の直観的なイメージを掴むこと。これらを主な目標とします。ものの本ではあまり詳しく踏み込んで説明されることが少ないように思われる正規座標系や曲率などの自然な導入を行って、それらの幾何学的なイメージが自然に持てるような議論の展開を目指しました。形式には拘らずに、また数学的な完全な記述もあまり目指さずに書きました。数学的に完全なあるいは形式的な記述が好みの読者は必要に応じて数学の本を参照することをおすすめします。

2 ユークリッド空間の中の超曲面を扱う

最初は考えている空間 M がより大きな次元を持つ N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の部分空間の中のある n 次元の超曲面であるとして論じる。一般的に n 次元の多様体と呼ばれる空間はそのような大きな次元をもつユークリッド空間の部分空間として扱うことができることが知られている。ここではそのことを証明しないが、その事実だけを流用する。最後の方でそのような大きな空間の部分空間としてではなく、それそのものとして多様体として扱うことができることに少しだけ触れる予定ではあるが、そこから出発するとこの note の主目的である曲がった空間の幾何学的なイメージや各数学的対象の直観的なイメージを掴むことから少し遠ざかってしまう。曲がった空間に対する素直なイメージを持つためには空間を大きなユークリッド空間に埋め込まれた超曲面として議論をすることが一番の近道のように思う。

定義 2.1. N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ とは N 個の実数の組 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 全体からなる集合であり、それらに通常の実ベクトル空間の構造を入れたものである。

定義 2.2. $\mathbb{R}^N$ の部分集合 M が n 次元の超曲面であるとは M の任意の点 p に対して、 M の中での p の近傍 $U (\subset M)$ と $\mathbb{R}^n$ のある開集合 V との間の滑らかな全単射写像をとることができることをいう。この時 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in V$

を U の局所座標と呼ぶ。こう書いた時は p は V の中のある点 $\mathbf{u}_p$ に対応していて、 $\mathbf{u}$ は p のまわりの局所的な座標として捉える。

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ を $p \in M$ のまわりの局所座標とする。一方、 $M \subset \mathbb{R}^N$ なので $\mathbf{u}$ の対応する点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ を取ることができる。この対応を $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ のようにして $\mathbf{x}$ を $\mathbf{u}$ の関数として表す。 M の $\mathbf{x}$ を始点とする接ベクトルは

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_n} \quad (1)$$

の n 個ベクトルの線形結合によって表すことができる。これらひとつひとつがベクトルであり、

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}, \frac{\partial x_2}{\partial u_i}, \dots, \frac{\partial x_N}{\partial u_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

である。ここでベクトルは縦ベクトルのように書いたり横ベクトルのように書いたりするが適宜読み直してほしい。必ずしも接ベクトルの基底をこれらに取る必要もないので一般的に接ベクトルの基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ と表すことにする。ただしこれらはどれも直交しているものとする。またその大きさも 1 であるように取ることにする。こうすると $\mathbf{x}$ を始点とするベクトルで M に接するものはすべて表すことができるが、それらと直交するベクトルはこれらでは表すことができない。 $\mathbb{R}^N$ の中のベクトルなので、残り $N - n$ 個の基底ベクトルをとることができる。これらを $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_{N-n}$ で表すことにする。これらもお互いに直交していて大きさが 1 であるとする。こうして $\mathbf{x}$ を始点とする $\mathbb{R}^N$ の中のベクトルの正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{N-n}$ が出そろった。一般的に $\mathbf{x}$ を始点とするどの接ベクトルとも直交するベクトルを $\mathbf{x}$ を始点とする M の法線ベクトルと呼ぶ。

超曲面 M の中の曲線 C 上の位置は $\mathbb{R}^N$ の中での座標を用いて $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t$ のように表される。速度ベクトルは $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ であり、その曲線の長さは

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}| dt = \int_0^t \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_N^2} dt \quad (ds = |\mathbf{v}| dt) \quad (3)$$

である。速度ベクトル $\mathbf{v}$ に対して、パラメータを t の代わりに s で取り直したものを $\mathbf{e}$ とする。即ち

$$\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad (4)$$

これは曲線 C に接した大きさが 1 のベクトルである。 $|\mathbf{e}|^2 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 1$ を s で微分すると $\langle \mathbf{e}, \frac{d\mathbf{e}}{ds} \rangle = 0$ が得られるので $\mathbf{e}$ とその s での微分 $\frac{d\mathbf{e}}{ds}$ とは直交している。従って

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \kappa_g \mathbf{e}_g + \kappa_n \mathbf{n}_n \quad (5)$$

のように表すことができる。ここで $\mathbf{e}_g$ は $\mathbf{e}$ と直交する M の単位接ベクトルであり、 $\mathbf{n}_n$ は単位法線ベクトルである。2次元の曲面の中の曲線と同じで、 $\kappa_g = 0$ となる曲線を測地線という。 $\kappa_g \mathbf{e}_g$ が加速度ベクトルであり、 $\kappa_n \mathbf{n}_n$ が拘束力と解釈できる。 κ_g が加速度の大きさであり、 κ_n が拘束力の大きさを表す。

曲線の線素 $(ds)^2$ は

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= |\mathbf{v}|^2 (dt)^2 \\ &= \left\langle \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\rangle (dt)^2 \\ &= \sum_{i,j=1,\dots,n} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \right\rangle \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} (dt)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

であることから形式的な線素の表式は

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1,\dots,n} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \right\rangle du^i du^j \quad (7)$$

と表される。この時

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \right\rangle \quad (8)$$

を計量と呼ぶ。ここで計量は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{u}$ との間の関係のみによって決まるということに注意されたい。つまり s や t といった他の要素には依存しない。

さて $\mathbf{e}$ は $\mathbf{x}$ を始点とした接ベクトルなので $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) := \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^n} \right)$ の線形結合で表すことができる。即ち

$$\mathbf{e} = v^1 \mathbf{u}_1 + v^2 \mathbf{u}_2 + \dots + v^n \mathbf{u}_n, \quad v^i = \frac{du^i}{ds} \quad (9)$$

である。ここで $\mathbf{e}$ の s での微分は

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \sum_{i=1, \dots, n} \left(\frac{dv^i}{ds} \mathbf{u}_i + v^i \frac{d\mathbf{u}_i}{ds} \right) \quad (10)$$

である。また $\frac{d\mathbf{u}_i}{ds}$ は一般的に M の接ベクトルとも法線ベクトルとも限らないので、

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{ds} = \sum_{j=1, \dots, n} w_j^i \mathbf{u}_j + \sum_{\alpha=1, \dots, N-n} \sigma_i^\alpha \mathbf{n}_\alpha \quad (11)$$

と書ける。従って $\frac{d\mathbf{e}}{ds}$ は

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \sum_{i,j=1, \dots, n} \left(\frac{dv^i}{ds} + v^j w_j^i \right) \mathbf{u}_i + \sum_{\alpha=1, \dots, N-n} v^i \sigma_i^\alpha \mathbf{n}_\alpha \quad (12)$$

この右辺の $\mathbf{u}_i$ 成分を取り出して書くと

$$\frac{dv^i}{ds} + \sum_{j=1, \dots, n} v^j w_j^i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (13)$$

一方で $\mathbf{u}_i$ の s での微分を具体的に書くと

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_i}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \right) \\ &= \sum_{j=1, \dots, n} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{du^j}{ds} \\ &= \sum_{j=1, \dots, n} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} v^j \end{aligned} \quad (14)$$

ここで (14) 式と (11) 式と見比べるとそれぞれの右辺が等しいことが分かる。 $\frac{d\mathbf{u}_i}{ds}$ と $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ との内積をとると

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^1 \\ \vdots \\ w_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{u}_1, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^1} \right\rangle & \dots & \left\langle \mathbf{u}_1, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^n} \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \mathbf{u}_n, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^1} \right\rangle & \dots & \left\langle \mathbf{u}_n, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^n} \right\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \quad (15)$$

となる。ここで左辺の最初の行列は計量 $g_{ij} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \right\rangle$ になっている。計量の逆行列を g^{ij} で表すと、 $\frac{\partial}{\partial u^i} \langle \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_k \rangle = \left\langle \mathbf{u}_r, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^k} \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}_k, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^r} \right\rangle$ に注意すると

$$\begin{aligned} w_i^j &= \sum_{r,k=1, \dots, n} g^{jr} \left\langle \mathbf{u}_r, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^k} \right\rangle v^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r,k=1, \dots, n} g^{jr} \left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^r} \right) v^k \end{aligned} \quad (16)$$

であることが分かる。ここで

$$w_i^j = \sum_{k=1, \dots, n} \Gamma_{ik}^j v^k \quad (17)$$

のように書くようにすれば

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{r=1, \dots, n} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{rj}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right) \quad (18)$$

と表すことができる。 Γ_{jk}^i は Christoffel の記号と呼ばれる。また (17) の左辺の w_i^j は Levi-Civita 接続と呼ばれる。特に誤解のないときには接頭語を省略して単に接続と呼ぶこともある。この Christoffel の記号は計量 g_{ij} とその逆行列 g^{ij} のみによって決まることに注意されたい。計量と従ってその逆行列は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{u}$ との間の関係のみによって決まるのであった。従って Christoffel の記号もまた $\mathbf{x}$ と $\mathbf{u}$ との間の関係のみによって決まる。このことは Levi-Civita 接続 w_i^j が単にベクトル $\mathbf{e}$ の成分 $v^1, \dots, v^n$ の一次結合によって表すことができ、 $v^1, \dots, v^n$ への依存がそれのみであることを意味する。Christoffel の記号は下付きの添え字に関して対称である。即ち

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i \quad (19)$$

である。

$\mathbf{n}_\alpha$ と $\frac{d\mathbf{e}}{ds}$ との内積をとると (10) 式と (14) とを使うと

$$\left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{d\mathbf{e}}{ds} \right\rangle = \sum_{j,k=1, \dots, n} \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^j \partial u^k} \right\rangle v^j v^k \quad (\alpha = 1, \dots, N-n) \quad (20)$$

を得る。従って $\frac{d\mathbf{e}}{ds}$ の法線成分 $\mathbf{n}$ は

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1, \dots, N-n} \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{d\mathbf{e}}{ds} \right\rangle \mathbf{n}_\alpha = \sum_{\substack{j,k=1, \dots, n \\ \alpha=1, \dots, N-n}} \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^j \partial u^k} \right\rangle v^j v^k \mathbf{n}_\alpha \quad (21)$$

となる。これは 2 次元の曲面上の曲線の法曲率に対応するもので、**第二基本形式**と呼ばれる。これは上記で述べたように曲線上を運動する質点に働く拘束力を表している。(12) 式と (20) 式とを見比べると

$$\sigma_i^\alpha = \sum_{j=1, \dots, n} \sigma_{ij}^\alpha v^j, \quad \sigma_{ij}^\alpha = \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle \quad (22)$$

の関係があることが分かる。

加速度が 0 の場合は $\frac{d\mathbf{e}}{ds}$ の接線成分が 0 である場合なので、(13) 式より

$$\frac{dv^i}{ds} + \sum_{j=1, \dots, n} v^j w_j^i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (23)$$

が得られる。これは**測地線の方程式**と呼ばれる。あるいは (17) を使って書き下すと

$$\frac{dv^i}{ds} + \sum_{j,k=1, \dots, n} \Gamma_{jk}^i v^j v^k = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (24)$$

と書ける。この条件を満たす場合はその曲線は測地線である。言い換えると測地線に沿って運動する質点には加速度が働かず、拘束力のみが働いている。測地線の方程式は超曲面 M の座標 u^i に関しては 2 階の微分方程式なので ($v^i = \frac{du^i}{ds}$ に注意) 初期条件として $s = 0$ の時の初期位置 p と、初速度ベクトル $\mathbf{v}_0$ が与えられれば方程式を一意に解くことができる。測地線の方程式の解はパラメータ s に関してどこまでも延長できるとは限らないが、 $s = 0$ の

近傍には延長できるので初期値 $\mathbf{v}_0$ の大きさが十分に小さければ $s = 1$ まで延長できる。このことは測地線の方程式で v^i を $1/C$ 倍にすればパラメータ s は C 倍に取り直すことで同じ測地線の方程式となることからすぐに理解できる。そうすると p での超曲面 M の接ベクトル $\mathbf{v}_0$ を、初期値が $\mathbf{v}_0$ の測地線の方程式の解の $s = 1$ での位置に対応させる写像 $\exp_p : \mathbf{v}_0 \rightarrow \mathbf{u}$ を考えることができる。ここまでの話からもちろん点 p の全ての接ベクトルに対して定義できるとは限らないので、一般には点 p の近傍にある接ベクトルに対して定義される。この対応関係を**正規座標**あるいは**測地座標**という。

次に超曲面 M に接している一般的なベクトル $\mathbf{a}$ について同じように微分をすることを考える。ベクトル $\mathbf{a}$ は M に接しているので接ベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ の線形結合で書ける。

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1, \dots, n} a^i \mathbf{u}_i \quad (25)$$

今度はこのベクトルは曲線 C に沿っているとは限らない。このベクトルを曲線 C に沿った s 方向への微分をとると

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds} = \sum_{i,j=1, \dots, n} \left(\frac{da^i}{ds} + a^j w_j^i \right) \mathbf{u}_i + \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ \alpha=1, \dots, N-n}} a^i \sigma_i^\alpha \mathbf{n}_\alpha \quad (26)$$

と書ける。ここで w_j^i は (17) と同一のものである。この時測地線と同じように接線成分が 0 であるとき、即ち

$$\frac{da^i}{ds} + \sum_{j,k=1, \dots, n} \Gamma_{jk}^i a^j v^k = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (27)$$

の時、ベクトル $\mathbf{a}$ は曲線 C に沿って**平行である**という。 $\mathbf{a}$ が曲線 C に沿って平行であるとき、 $\frac{d}{ds} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ となるので、曲線 C に沿ってベクトル $\mathbf{a}$ を動かしていてもその大きさが変わらない。逆にある点 $\mathbf{p} \in M$ において超曲面 M に接する接ベクトル $\mathbf{a}_0$ が与えられた時に、平行移動の微分方程式 (27) 式と初期条件 $s = 0$ で $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ で s の一階微分方程式を解くことができる。こうして与えられるベクトル $\mathbf{a}$ は曲線 C に沿って平行なベクトルとなっている。一般的に任意に与えられた超曲面 M に接しているベクトル場 $\mathbf{a}$ に対しては、 s 方向の微分は平行移動になっているとも限らず、また測地線の接ベクトルとも限らないので $\mathbf{u}_i$ の成分は 0 とはならない。平行移動という意味を考えてみる。超曲面 M に接しているベクトル $\mathbf{a}$ を超曲面内の曲線 C に沿って移動させることを考える時、その向きや大きさが変えずに移動するというのは $\frac{d\mathbf{a}}{ds}$ の M に接する成分がすべて 0 であることを意味する。そのような移動は平面 $\mathbb{R}^2$ 内であれば平行移動と呼ぶので、そのような平行移動の概念の曲がった超曲面 M への拡張とも言える。平面内であればベクトルを平行移動させてまた同じ位置に戻ってくれば、その大きさや向きが変化していないので最初と同じベクトルと同じ向きと大きさになっている。しかし一般的に曲がった超曲面 M であれば一般的にそうとは限らない。移動の際にその向きや大きさを変えないように移動させていたとしてもである。その辺のところを以下で見ていくことにする。

その前にまず以下の計算で必要なものを揃えておく。接ベクトルの基底 $\mathbf{u}_i$ の u^a ($a = 1, \dots, n$) 方向微分は

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial u^a} = \sum_{j=1, \dots, n} \Gamma_{ia}^j \mathbf{u}_j + \sum_{\alpha=1, \dots, N-n} \sigma_{ia}^\alpha \mathbf{n}_\alpha \quad (i, a = 1, \dots, n) \quad (28)$$

のようになるのであった。ここで、今度のは $\mathbf{n}_\alpha$ の u^a 方向の微分を考える。 u^a で微分すると

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^a} = \sum_{j=1, \dots, n} \rho_{\alpha a}^j \mathbf{u}_j + \sum_{\beta=1, \dots, N-n} \kappa_{\alpha a}^\beta \mathbf{n}_\beta \quad (a = 1, \dots, n, \alpha = 1, \dots, N-n) \quad (29)$$

のようになる。ここで $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{n}_\alpha \rangle = 0$ より、これを u^a で微分すると $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = g_{ij}$ に注意すれば

$$\rho_{\alpha a}^i = - \sum_{j=1, \dots, n} g^{ij} \sigma_{ja}^\alpha \quad (30)$$

であることが分かる。また $\langle \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ を u^a で微分すると

$$\kappa_{\beta a}^\alpha = -\kappa_{\alpha a}^\beta \quad (a = 1, \dots, n, \alpha, \beta = 1, \dots, N-n) \quad (31)$$

であることが分かる。ここで計量の g_{ij} や計量の逆 g^{ij} で添え字の上げ下げを行うという規約を導入する。即ち $v_i = \sum_j g_{ij} v^j$ や $v^i = \sum_j g^{ij} v_j$ のようなものを表すと決める。こう決めると (30) の右辺は $-\sigma_a^{\alpha i}$ と簡単に表すことができる。

さて超曲面 M に接するベクトルを平行移動して元の位置に戻った時のずれについて考察をしてみる。そのためには接ベクトルの 2 回微分を見てみると良い。 $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{u}_1 + \dots + v^n \mathbf{u}_n$ に対して u^a の方向微分を行った後に u^b 方向微分をとると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^b} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^a} \right) &= \sum_{i=1, \dots, n} \frac{\partial}{\partial u^b} \left[\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^a} + \sum_{j=1, \dots, n} \Gamma_{ja}^i v^j \right) \mathbf{u}_i \right] + \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ \alpha=1, \dots, N-n}} \frac{\partial}{\partial u^b} (\sigma_{ia}^\alpha v^i \mathbf{n}_\alpha) \\ &= \sum_{i=1, \dots, n} \left(\frac{\partial^2 v^i}{\partial u^b \partial u^a} + \sum_{j=1, \dots, n} \frac{\partial v^j}{\partial u^a} \Gamma_{jb}^i + \sum_{j=1, \dots, n} \frac{\partial v^j}{\partial u^b} \Gamma_{ja}^i + \sum_{j,k=1, \dots, n} \frac{\partial \Gamma_{ja}^i}{\partial u^b} v^j + \sum_{\substack{j,k=1, \dots, n \\ \alpha=1, \dots, N-n}} \Gamma_{ja}^k \Gamma_{kb}^i v^j - \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ \alpha=1, \dots, N-n}} \sigma_{ja}^\alpha \sigma_b^{\alpha i} v^j \right) \mathbf{u}_i \\ &\quad + \sum_{\alpha=1, \dots, N-n} \left[\sum_{i=1, \dots, n} \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^a} + \sum_{j=1, \dots, n} \Gamma_{ja}^i v^j \right) \sigma_{ib}^\alpha + \sum_{i=1, \dots, n} \frac{\partial}{\partial u^b} (\sigma_{ia}^\alpha v^i) + \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ \beta=1, \dots, N-n}} \sigma_{ia}^\beta \kappa_{\beta b}^\alpha v^i \right] \mathbf{n}_\alpha \end{aligned} \quad (32)$$

のようになる。ここで $\mathbf{v}$ の u^a での微分と u^b での微分はその微分をする順番を変えても変わらないので a と b を入れ替えたものとの差をとると 0 となる。一方で接線成分、即ち (32) 式の右辺の 2 段目の $\mathbf{u}_i$ の係数のカッコの中の最初の 3 項は a と b を入れ替えたものとの差をとると消えてしまう。従って

$$\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial u^l} + \sum_{m=1, \dots, n} (\Gamma_{jl}^m \Gamma_{km}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{lm}^i) = \sum_{\alpha=1, \dots, N-n} (\sigma_{jl}^\alpha \sigma_k^{\alpha i} - \sigma_{jk}^\alpha \sigma_l^{\alpha i}) \quad (33)$$

が分かる。この式の左辺を（従って右辺を） R_{jkl}^i と置いて Riemann 曲率テンソルと呼ぶ。即ち

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i &= \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial u^l} + \sum_{m=1, \dots, n} (\Gamma_{jl}^m \Gamma_{km}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{lm}^i) \\ &= \sum_{\alpha=1, \dots, N-n} (\sigma_{jl}^\alpha \sigma_k^{\alpha i} - \sigma_{jk}^\alpha \sigma_l^{\alpha i}) \end{aligned} \quad (34)$$

である。従って添え字の k と l の入れ替えで反対称である。即ち

$$R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i \quad (35)$$

である。また (34) の右辺の二段目の式を見ると、上付きの添え字を計量で下げたもの、即ち $R_{ijkl} = \sum_m g_{im} R_{jkl}^m$ に対してもうひとつの反対称性と対称性

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = R_{klij} \quad (36)$$

の関係があることが分かる。(34) の右辺の 2 段目の等式は Gauss の方程式と呼ばれる。ここで式の見通しをよくするために ∇_a を

$$\nabla_a \mathbf{v} = \sum_{i=1, \dots, n} \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^a} + \sum_{j=1, \dots, n} \Gamma_{ja}^i v^j \right) \mathbf{u}_i \quad (37)$$

として定義する。 M に沿ったベクトル $\mathbf{a}$ の積分曲線のパラメータを s とすれば

$$\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{v} = \sum_{i=1, \dots, n} \left(\frac{dv^i}{ds} + \sum_{j,k=1, \dots, n} \Gamma_{jk}^i v^j a^k \right) \mathbf{u}_i \quad (38)$$

のように表すこともある。この記法を使うと Riemann の曲率テンソルは

$$\sum_{i,j=1, \dots, n} R_{jkl}^i v^j \mathbf{u}_i = (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) \mathbf{v} \quad (39)$$

と書くこともできる。また (32) の右辺の 2 段目の法線成分に関して同様に a と b を入れ替えたものの差をとることで

$$\frac{\partial \sigma_{ia}^\alpha}{\partial u^b} - \frac{\partial \sigma_{ib}^\alpha}{\partial u^a} + \sum_{j=1, \dots, n} \left(\Gamma_{ia}^j \sigma_{jb}^\alpha - \Gamma_{ib}^j \sigma_{ja}^\alpha \right) = \sum_{\beta=1, \dots, N-n} \left(\sigma_{ib}^\beta \kappa_{\beta a}^\alpha - \sigma_{ia}^\beta \kappa_{\beta b}^\alpha \right) \quad (40)$$

を得る。この関係式を Codazzi–Mainardi の方程式という。

さて、超曲面 M 上の点 p での接ベクトル $\mathbf{v}_p$ と、 p の近くにある別の M 上の点 q での接ベクトル $\mathbf{v}_q$ とを比較する時に M 上の座標系 $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$ を基準に比較したときにはベクトルの成分を比較することになる。また比較する際にはベクトルを一方から他方へ平行移動する。従って点 p から点 q へ平行移動したときのベクトルの成分の差分は

$$\begin{aligned} v^i(q) - v^i(p) &= \sum_{j=1, \dots, n} \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(p) \Delta u^j \\ &= - \sum_{j,k=1, \dots, n} \Gamma_{jk}^i(p) v^j(p) \Delta u^k \end{aligned} \quad (41)$$

となる。ここで $\Delta \mathbf{u} = (\Delta u^1, \dots, \Delta u^n)$ は点 p と点 q との M 上の座標の差分である。次にさらに q の近くの p と q とも異なる点 r を取る。点 r と点 q との M 上の座標の差分を $\delta \mathbf{u} = (\delta u^1, \dots, \delta u^n)$ と表すと、点 q から点 r へベクトルを平行移動したときのベクトルの成分は

$$\begin{aligned} v^i(r) &= v^i(q) - \sum_{j,k=1, \dots, n} \Gamma_{jk}^i(q) v^j(q) \delta u^k \\ &= v^i(p) - \sum_{j,k=1, \dots, n} \left(\Gamma_{jk}^i(q) v^j(q) \delta u^k + \Gamma_{jk}^i(p) v^j(p) \Delta u^k \right) \\ &= v^i(p) - \sum_{j,k=1, \dots, n} \left(\Gamma_{jk}^i(q) v^j(p) \delta u^k - \sum_{l=1, \dots, n} \Gamma_{jk}^i(p) \Gamma_{lm}^j(p) v^l(p) \delta u^k \Delta u^m + \Gamma_{jk}^i(p) v^j(p) \Delta u^k \right) \\ &= v^i(p) - \sum_{j,k=1, \dots, n} \left(\Gamma_{jk}^i(p) v^j(p) \delta u^k + \sum_{l=1, \dots, n} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l}(p) v^j(p) \delta u^k \Delta u^l - \sum_{l,m=1, \dots, n} \Gamma_{jk}^i(p) \Gamma_{lm}^j(p) v^l(p) \delta u^k \Delta u^m + \Gamma_{jk}^i(p) v^j(p) \Delta u^k \right) \end{aligned} \quad (42)$$

となる。これに対して点 p から $\delta \mathbf{u}$ の分だけ異なる点を新たに点 s とする。点 s と点 r とは $\Delta \mathbf{u}$ だけ座標が異なる点となる。この時ベクトルを p から s へ平行移動してそれから r へ平行移動したベクトル $\mathbf{v}'$ の成分も同様になるが Δu^i と δu^i とが対称的に現れる。これらは一致せずにその差は、最初の点 q を経由して平行移動したベクトルを v_1^i とし、点 s を経由して平行移動したベクトルを v_2^i とすると

$$v_1^i(r) - v_2^i(r) = \sum_{j,k=1, \dots, n} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l}(p) - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k}(p) + \sum_{l,m=1, \dots, n} \left(\Gamma_{ml}^i(p) \Gamma_{jk}^m(p) - \Gamma_{mk}^i(p) \Gamma_{jl}^m(p) \right) \right) v^j(p) \delta u^k \Delta u^l \quad (43)$$

となる。右辺のカッコの中に現れたのはまさに Riemann の曲率テンソルである。これはベクトルを超曲面の閉路に沿って平行移動して元の位置まで戻した時に元のベクトルからベクトルがずれてしまうことを意味する。またそのずれが Riemann の曲率テンソルで計ることができることを意味する。[2]

ここまでの結果を見返してみる。3次元ユークリッド空間の中の2次元の曲面の時は、これはそのまま幾何のお話2[1] ノートの内容になっている。その場合(34)式の右辺の二段目は**ガウス曲率**（正確にはそれを計量の行列式で割ったもの）に等しい。こうしてみると(34)式の右辺の一段目の式は Christoffel の記号で、従って計量のみを用いて表すことができる。即ち曲面のガウス曲率は曲面上の計量が与えられると完全に決まる。これはガウスが "Theorema Egregium"（驚異の定理）と呼んだものである。¹ このことは一般的な N 次元ユークリッド空間の中の2次元の曲面であっても同じようなことが言える。以下でそれを詳しく見ていく。2次元の曲面の時は曲率の添え字は1と2のみであることと、曲率 R_{ijkl} の添え字に関する反対称性を考慮すると実質的に独立な成分が1つしかないことが分かる。即ちそのことを表すと

$$R_{ijkl} = \sigma \cdot \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2) \quad (44)$$

のように表される。ここで σ は σ_{ij}^α からなる行列の α に関する和、即ち

$$\sigma = \sum_{\alpha=1, \dots, N-2} \det(\sigma_{ij}^\alpha)_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (45)$$

である。また ε_{ij} ($i, j = 1, 2$) は

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & : i=1, j=2 \\ -1 & : i=2, j=1 \\ 0 & : i=j \end{cases} \quad (46)$$

である。いったんまた話を n 次元の超曲面 M に戻して、ここまでは基底ベクトルとして $\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}$ を選んでいたが、代わりに**局所正規直交基底**を選ぶ。即ち点 $p \in M$ のでの接ベクトルの基底として $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ をそれらが互いに直交していて、かつ大きさが1であるベクトルを選ぶ。 $\mathbf{u}_i$ と $\mathbf{e}_i$ との関係はベクトルの基底の取り換えなので次のような線形な関係にある。

$$(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) = (\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) \mathcal{A} \quad (47)$$

ここで $(\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n)$ や $(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ は各ベクトル $\mathbf{e}_i$ 、 $\mathbf{u}_i$ を縦ベクトルとして扱って並べてできる $n \times n$ 行列を表す。また $\mathcal{A}$ は基底の変換行列であり、一般に $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$ に依存する $n \times n$ 行列である。 $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n)$ と置いて

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^t \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^t \end{pmatrix} (\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n \rangle \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (48)$$

なので（ここでの1は $n \times n$ の単位行列を意味する）、

$$\mathbf{g} = \mathcal{A}^t \mathcal{A} \quad (49)$$

¹ガウス自身は3次元ユークリッド空間の中の2次元曲面について示した。

となることが分かる。ここで $\mathbf{g}$ は計量 g_{ij} を行列として扱ったものを表す。ベクトル $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{u}_1 + \cdots + v^n \mathbf{u}_n$ の基底を $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ で置き換えると

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i,j=1,\dots,n} A_i^j v^i \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{i=1,\dots,n} v^i \mathbf{e}_i \quad \left(v^i = \sum_{j=1,\dots,n} A_j^i v^j \right) \end{aligned} \quad (50)$$

と書ける。従って第二基本形式は

$$\sigma_{ij}^\alpha = \sum_{k,l=1,\dots,n} \sigma_{kl}^{\prime\alpha} A_i^k A_j^l \quad (51)$$

の関係が分かる。すると Riemann の曲率テンソルもまた

$$R_{ijkl} = \sum_{a,b,c,d=1,\dots,n} R'_{abcd} A_i^a A_j^b A_k^c A_l^d \quad (52)$$

となることが分かる。ここでまた $n = 2$ の 2 次元曲面の場合を考える。その場合には Riemann の曲率テンソルは (44) の関係式から

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \sum_{a,b,c,d=1,2} \sigma' \cdot \varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} A_i^a A_j^b A_k^c A_l^d \\ &= \sigma' (\det A)^2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (53)$$

さらに (44) と (49) 式から

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\det \mathbf{g}} \quad (54)$$

となる。これは $N = 3$ の時はちょうど幾何のお話 2[1] で得られたガウス曲率に対する一般式と一致している。即ち一般の N 次元ユークリッド空間の中の 2 次元曲面への拡張となっている。ここでまた一般的な n 次元の超曲面 M の場合を考える。超曲面 M の点 p の 2 つの異なる接ベクトルを $\mathbf{v}_1 = v_1^1 \mathbf{u}_1 + \cdots + v_1^n \mathbf{u}_n$ と $\mathbf{v}_2 = v_2^1 \mathbf{u}_1 + \cdots + v_2^n \mathbf{u}_n$ として、これらの張る p での M の 2 次元接平面を Π とする。これまでと同じ議論を行う。 $\mathbf{v}_a$ ($a = 1, 2$) の微分は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_a}{ds} &= \sum_{b=1,2} w_a^b \mathbf{v}_b + \sum_{i=1,\dots,n-2} w_a^i \mathbf{u}_i + \sum_{\alpha=1,\dots,N-n} \sigma_a^\alpha \mathbf{n}_\alpha \\ &= \sum_{b=1,2} \tilde{w}_a^b \mathbf{v}_b + \sum_{\alpha=1,\dots,N-2} \tilde{\sigma}_a^\alpha \mathbf{n}_\alpha \end{aligned} \quad (55)$$

のようになる。ここで右辺の 1 段目は M の接ベクトルの基底を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2}$ と選んで表示したものである。2 段目は Π の接ベクトルと法線ベクトルとで分けて表したものである。こうして並べてかき分けてみると、1 段目の第一項の w_a^b と 2 段目の第一項の $\tilde{w}_a^b$ とは等しいことが分かる。また 1 段目の第三項の σ_a^α は 2 段目の第二項に現れる $\alpha = 1, \dots, N-n$ までの $\tilde{\sigma}_a^\alpha$ と等しいことが分かる。従って 1 段目の w_a^i は 2 段目の $\alpha = N-n+1, \dots, N-2$ までの $\tilde{\sigma}_a^\alpha$ が等しいことが分かる。ここで Π を測地座標とする 2 次元曲面 S を考えると、 S の Riemann の曲率テンソル $\tilde{R}_{abcd}$ を考えることができる。それは $\tilde{\sigma}_a^\alpha$ を用いて (34) のように表すことができた。一方で超曲面 M の Riemann の曲率テンソル R_{ijkl} は σ_a^α を用いて同様に (34) のように表される。ベクトル $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ が測地線の方程式を満たすとき、 w_a^b と w_a^i は全て 0 となる。従って $\tilde{\sigma}_a^\alpha$ の $\alpha = N-n+1, \dots, N-2$ は全て 0 となる。従ってその場合にはそれぞれの Riemann の曲率テンソルは等しい。即ち

$$\tilde{R}_{abcd} = \sum_{i,j,k,l=1,\dots,n} R_{ijkl} v_a^i v_b^j v_c^k v_d^l \quad (56)$$

この左辺は (53) 式の左辺と等しいものである。この場合 S の計量は $g_{ab} = \langle \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b \rangle$ なので従って S のガウス曲率は

$$K = \sum_{i,j,k,l=1,\dots,n} \frac{R_{ijkl} v_1^i v_2^j v_1^k v_2^l}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^2} \quad (57)$$

のように表すことができる。この時 K を M の Π に対する**断面曲率**とも呼ぶ。[3]

ここまで N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の中の n 次元の超曲面 M について考えてきた。ここでは超曲面 M が $\mathbb{R}^N$ の座標 $\mathbf{x}$ の関数 $f(\mathbf{x})$ を用いて $f(\mathbf{x}) = 0$ で定められている場合を考える。 M の座標 $\mathbf{u}$ の関数として見た時は $f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = 0$ という式は恒等式となる。これを u^i で微分すると

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \right\rangle = 0 \quad (58)$$

を得る。この式から $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ と $\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}$ とは直交している。即ち $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ は法線ベクトルとなっていることが分かる。点 $\mathbf{x}$ から出る一次独立なベクトルの組は N 個あるので、そのうちの 1 つを $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ と平行にとれば、他の $N-1$ 個は $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ に直交するように取れる。即ち $f = 0$ を満たす自由度は $N-1$ 個ある。従って M の座標としては $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^{N-1})$ のように取ることができて、 M は $N-1$ 次元空間をなす。さらに上記の関係式も $\mathbf{u}$ に関しては恒等式なのでさらに u^j で微分しても 0 である。即ち

$$\sum_{a,b=1,\dots,N} \frac{\partial^2 f}{\partial x^a \partial x^b} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^b}{\partial u^j} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle = 0 \quad (59)$$

を得る。(22) 式から、法線成分は 1 つしかないので単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ と書くと

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n} \right\rangle \sigma_{ij} = - \left\langle \mathbf{u}_i, \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_j \right\rangle \quad (60)$$

の関係が得られる。従って $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right| \mathbf{n}$ に注意すれば、 σ_{ij} は f を用いて

$$\sigma_{ij} = - \frac{1}{\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|} \left\langle \mathbf{u}_i, \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_j \right\rangle \quad (61)$$

と表すことができる。 σ_{ij} を用いて Riemann の曲率テンソルを表すことができるので f を用いて Riemann の曲率テンソルを書き表す関係式が得られたことになる。具体的に書き表すと

$$R_{ijkl} = \frac{1}{\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|^2} \left(\left\langle \mathbf{u}_i, \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_k \right\rangle \left\langle \mathbf{u}_j, \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_l \right\rangle - \left\langle \mathbf{u}_i, \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_l \right\rangle \left\langle \mathbf{u}_j, \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_k \right\rangle \right) \quad (62)$$

となる。これらの関係式を見ると σ_{ij} は f のヘッシアンに関係しているし、曲率はその部分 2×2 行列の行列式に関係している。例として簡単な具体例で計算してみる。 n 次元の半径 r の球面を M とする。 M を規定する関数は $f = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 - r^2)$ である。微分すると $d\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle$ なので $\mathbf{x}_0 = (r, 0, 0, \dots, 0)$ では $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = (r, 0, 0, \dots, 0)$ となる。従って $\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \right| = r$ ヘッシアン $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}$ は単位行列 1 に等しい。従って

$$R_{ijkl} = \frac{1}{r^2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (63)$$

となり、よく知られた n 次元球面の Riemann の曲率テンソルが得られた。

M を定める関数が複数あり、 $N-n$ 個の条件 $f^1(\mathbf{x}) = 0, f^2(\mathbf{x}) = 0, \dots, f^{N-n}(\mathbf{x}) = 0$ によって定められ、点 $\mathbf{x}$ の近傍で各 $\frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{x}}$ が全て一次独立である時は、点 $\mathbf{x}$ での M の接ベクトルで一次独立なものが各 $\frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{x}}$ と直交する n 個が取れるので M は n 次元の空間となる。この場合にも各 f^α に対して上記の計算が従い、

$$\sum_{\beta=1,\dots,N-n} \left\langle \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}^\beta \right\rangle \sigma_{ij}^\beta = - \left\langle \mathbf{u}_i, \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_j \right\rangle \quad (64)$$

となる。従って

$$\sigma_{ij}^\alpha = - \sum_{\beta=1, \dots, N-n} \left\langle \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}_\beta \right\rangle^{-1} \left\langle \mathbf{u}_i, \frac{\partial^2 f^\beta}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_j \right\rangle \quad (65)$$

として得られる。ここで $\left\langle \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}_\beta \right\rangle^{-1}$ は $\left\langle \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}_\beta \right\rangle$ の逆行列を表す。従ってこれから Riemann の曲率テンソルを f^α を用いて表すことができる。多くの場合で、超曲面 M をこのように関数を用いて規定することがよくある。その場合には関数を使って直接 Riemann の曲率を計算することができる。

ここで正規座標について少し考察する。正規座標系は点 p の接ベクトル $\mathbf{u}$ を初期ベクトルとした測地線方程式 (24) 式の解は $\mathbf{x}_s$ ($\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}_s$) の $s = 1$ での位置座標を $\mathbf{u}$ とするものであった。従って $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ である。初期ベクトルを $\mathbf{u}$ から $C\mathbf{u}$ に置き直した測地線の方程式の解 $\mathbf{x}'_s$ はもとの測地線の方程式の解 $\mathbf{x}_s$ の s を Cs に置き換えたものに等しい。従って $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}(s\mathbf{u})$ となることが分かる。これから

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_s}{ds} &= \mathbf{v}_s \\ &= \sum_{i=1, \dots, n} u^i \mathbf{u}_i \quad \left(\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}(s\mathbf{u}) \right) \end{aligned} \quad (66)$$

これをさらに s で微分すると $\mathbf{v}_s$ が測地線の方程式を満たすことから $\frac{d\mathbf{x}_s}{ds}$ の接線成分が 0 になることに注意すれば

$$\sum_{i,j=1, \dots, n} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} u^i u^j = \sum_{\substack{i,j=1, \dots, n \\ \alpha=1, \dots, N-n}} \sigma_{ij}^\alpha u^i u^j \mathbf{n}_\alpha \quad (67)$$

を得る。右辺は $\mathbf{v}_s$ を s で微分したときの法線成分になる。従って左辺は接線成分を含まないことが分かる。従って正規座標系では

$$\sum_{j,k=1, \dots, n} \Gamma_{jk}^i u^j u^k = \sum_{j,k=1, \dots, n} \frac{1}{2} (\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i) u^j u^k = 0 \quad (68)$$

である。これは恒等式なのでさらに s で微分すると

$$\sum_{j,k,l=1, \dots, n} \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} + \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^j} + \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial u^k} \right) u^j u^k u^l = 0 \quad (69)$$

となる。ここでこれらの Γ_{jk}^i は $s\mathbf{u}$ に依存しているためそのままこれらの和の係数が 0 であるとは言えない。一点、 $s = 0$ の時のみ $\mathbf{u}$ に依存しなくなるため点 p においてのみ成分が 0 であるということが出来る。従って正規座標系では Γ_{jk}^i の下付きの添え字の対称性から

$$\Gamma_{jk}^i(0) = 0 \quad (70)$$

および

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l}(0) + \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^j}(0) + \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial u^k}(0) = 0 \quad (71)$$

となることを意味する。さて Riemann の曲率テンソルは

$$R_{jkl}^i(0) = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k}(0) - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l}(0) \quad (72)$$

一方、添え字を入れ替えて

$$R_{lkj}^i(0) = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial u^k}(0) - \frac{\partial \Gamma_{lk}^i}{\partial u^j}(0) \quad (73)$$

これらを足して、さらに (71) 式を使うと

$$\frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k}(0) = \frac{1}{3} (R_{jkl}^i(0) + R_{ljk}^i(0)) \quad (74)$$

を得る。この式を使うと正規座標系での計量を Riemann の曲率テンソルを用いた表示を得ることができる。計量 $g_{ij}(\mathbf{u})$ を点 p 、即ち $\mathbf{u} = 0$ まわりで展開すると

$$g_{ij}(\mathbf{u}) = g_{ij}(0) + \sum_{k=1, \dots, n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0) u^k + \frac{1}{2!} \sum_{k, l=1, \dots, n} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l}(0) u^k u^l + \dots \quad (75)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} &= \frac{\partial}{\partial u^k} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\ &= \left\langle \mathbf{u}_i, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^k \partial u^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^k \partial u^i}, \mathbf{u}_j \right\rangle \\ &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \end{aligned} \quad (76)$$

さらに

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial u^l} + \frac{\partial \Gamma_{jik}}{\partial u^l} \quad (77)$$

となる。従って点 p では $\mathbf{u} = 0$ なので (74) 式を使うと

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l}(0) &= \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial u^l}(0) + \frac{\partial \Gamma_{jik}}{\partial u^l}(0) \\ &= \frac{1}{3} (R_{iklj}(0) + R_{jlk i}(0)) \end{aligned} \quad (78)$$

従って

$$g_{ij}(\mathbf{u}) = g_{ij}(0) - \frac{1}{3} \sum_{k, l=1, \dots, n} R_{iklj}(0) u^k u^l + \dots \quad (79)$$

を得る。ここでさらに点 p での計量を計算する。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_s \rangle &= \left\langle \frac{d\mathbf{x}_s}{ds}, \frac{d\mathbf{x}_s}{ds} \right\rangle \\ &= \sum_{i, j=1, \dots, n} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial u^j} \right\rangle u^i u^j \\ &= \sum_{i, j=1, \dots, n} g_{ij}(\mathbf{s}\mathbf{u}) u^i u^j \end{aligned} \quad (80)$$

となるが、 $\lim_{s \rightarrow 0} \langle \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_s \rangle = \mathbf{u}^2$ であるので $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ となる。ここで δ_{ij} は $i = j$ のとき 1 でそれ以外で 0 となる。従ってまとめると正規座標系では、計量は

$$g_{ij}(\mathbf{u}) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{k, l=1, \dots, n} R_{ikjl}(0) u^k u^l + \dots \quad (81)$$

と書けることが分かった。従って正規座標系で表した時には計量が、従って曲線の長さがユークリッド空間の時からどれだけずれたかを Riemann の曲率テンソルによって測ることができる。さらに、体積要素は幾何のお話ノート [4] によれば計量の行列式のルート $\sqrt{g}$ で表された。従って (81) の行列式を取れば

$$g = \det g_{ij} = 1 - \frac{1}{3} \sum_{i, k, l=1, \dots, n} R_{kil}^i(0) u^k u^l + \dots \quad (82)$$

となるため

$$\sqrt{g} = 1 - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1,\dots,n} R_{ij}(0) u^i u^j + \dots \quad (83)$$

となる。ここで

$$R_{ij} = \sum_{k=1,\dots,n} R_{ikj}^k \quad (84)$$

を Ricci テンソルと呼ぶ。添え字の上げ下げは計量 g_{ij} やその逆行列 g^{ij} で行う。ここでは高次のオーダーは無視しているので実質的に δ_{ij} で上げ下げを行ってよい。即ち (83) 式から正規座標系で表した時に、体積がユークリッド空間の時の体積からどれくらいずれているかを Ricci テンソルで計ることができる。

この正規座標系での $|\mathbf{u}| < r$ の領域 D の体積を計算してみる。

$$\begin{aligned} V &= \int_D d^n \mathbf{x} \\ &= \int_D \sqrt{g} \cdot d^n \mathbf{u} \\ &= \int_D d^n \mathbf{u} - \frac{1}{6} R_{ij}(0) \int_D u^i u^j d^n \mathbf{u} + \dots \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} r^n - \frac{1}{6} R_{ij}(0) \int_D u^i u^j d^n \mathbf{u} + \dots \end{aligned} \quad (85)$$

ここで最後の段の第二項の計算は $i \neq j$ の時には被積分関数が奇関数になることと、積分領域が $\mathbf{u} = 0$ を中心に対称であることから 0 となる。残るのは $i = j$ の積分であり、対称性から添え字の i に依存しない。従って

$$\begin{aligned} \int_D (u^i)^2 d^n \mathbf{u} &= \frac{1}{n} \int_D \mathbf{u}^2 d^n \mathbf{u} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^r r^{n+1} dr \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n(n+2)\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n+2} \end{aligned} \quad (86)$$

となる。従って

$$V = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} r^n \left(1 - \frac{R(0)}{6(n+2)} r^2 + \dots \right) \quad (87)$$

となる。ここで

$$R = \sum_{i=1,\dots,n} R_i^i \quad (88)$$

をスカラー曲率という。即ち正規座標系で点 p からの距離が一定の球体の体積がユークリッド空間の場合からどれくらいずれるかをスカラー曲率で計ることができる。

3 曲がった空間を考察する

ここまではユークリッド空間の中にある超曲面を考えてきたので、自然に超曲面の曲がりを知る量として接続や曲率といったものが自然に誘導された。ここでは空間が曲がっていることを空間の外のユークリッド空間を持ち出すことなく計ることができるか？という問いに関して考察したい。最初に考察したいのは空間 M に 2 つの点が与

えられた時に、それらの間の最短ルートとそのルートの長さ (= 距離) である。これを数学的に扱う手法は確立されている。即ち点 p から点 q までを結ぶ可能な曲線 C の長さ

$$L = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_N}{dt}\right)^2} \cdot dt \quad (89)$$

を最小にする曲線 C を求める問題である。しかしこれは $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれた超曲面であればこれで良いが、今回はそのような描像を採用しない。従って空間 M の外の情報を使えない。ここまでの議論から空間 M に計量 g_{ij} が与えられていれば曲線 C の長さは

$$L = \int_0^t \sqrt{\sum_{i,j=1,\dots,n} g_{ij}(\mathbf{u}_t) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} \cdot dt \quad (90)$$

で与えられることが理解できる。端点の p と q を固定してその間を結ぶ曲線を動かした時にその曲線の長さが最小になる問題は曲線を動かした時に L がどう変わるかを計ればよい。曲線は $\mathbf{u}_t$ のように t を与えればそれに対して M 中の位置 $\mathbf{u}$ が決まるという形で与えられるので、曲線を動かすというのはそれに対して $\mathbf{u}_t \rightarrow \mathbf{u}_t + \delta \mathbf{u}_t$ のような変動が加わることを意味する。従って u^i に関して L の被積分関数の微分を行えば、それが L の変分となる。曲線の長さが最小になるというのはその変分に対して L の変化が停留するというよく使われる幾何学の手法をとることで計算することができる。このことは

$$\mathcal{L} = \sqrt{\sum_{i,j=1,\dots,n} g_{ij}(\mathbf{u}_t) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} \quad (91)$$

に対して δu^i の変分 $\delta \mathcal{L}$ を計算すればよい。実際に計算すると

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_{i,j=1,\dots,n} \frac{1}{2\mathcal{L}} \left(2g_{ij} \frac{d\delta u^i}{dt} \frac{du^j}{dt} + \sum_{k=1,\dots,n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \delta u^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{i,j=1,\dots,n} \left[\left(g_{ij} \frac{d^2 u^j}{dt^2} + \sum_{k=1,\dots,n} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) \right) \delta u^i - \frac{d}{dt} \left(g_{ij} \frac{du^j}{dt} \delta u^i \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{i,j=1,\dots,n} g_{ij} \left[\left(\frac{d^2 u^j}{dt^2} + \sum_{k,l,m=1,\dots,n} \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^m} + \frac{\partial g_{km}}{\partial u^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lm}}{\partial u^k} \right) \frac{du^l}{dt} \frac{du^m}{dt} \right) \delta u^i - \frac{d}{dt} \left(g_{ij} \frac{du^j}{dt} \delta u^i \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{i,j=1,\dots,n} g_{ij} \left(\frac{d^2 u^j}{dt^2} + \sum_{l,m=1,\dots,n} \Gamma_{lm}^j \frac{du^l}{dt} \frac{du^m}{dt} \right) \delta u^i + \sum_{i,j=1,\dots,n} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{g_{ij} \frac{du^j}{dt} \delta u^i}{\mathcal{L}} \right) - \frac{g_{ij} \frac{du^j}{dt} \delta u^i}{\mathcal{L}^2} \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (92)$$

ここで最後の等式の最初の項は測地線の方程式の形となっている。第二項は t に関する全微分の形である。第三項は $\mathcal{L}$ が曲線の長さの t での微分 $\frac{ds}{dt}$ なのでパラメータ t を曲線の長さそのもの s にとっておけば $\frac{ds}{dt} = \mathcal{L} = 1$ となり定数となるためその場合には t を s で取り直して $\frac{d\mathcal{L}}{ds} = 0$ となる。従って s で積分すれば

$$\delta L = - \int_0^L \left[\langle \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \delta \mathbf{u}_s \rangle - \sum_{i,j=1,\dots,n} \frac{d}{ds} \left(g_{ij} \frac{du^j}{ds} \delta u^i \right) \right] ds \quad (93)$$

となる。ここで変分は点 p と点 q を固定して行うため、 $s = 0$ と $s = L$ での $\mathbf{u}_s$ の変分 $\delta \mathbf{u}_s$ は 0 である。従ってこの積分の第二項は 0 となる。結果として第一項のみが残り、この変分が停留するという条件は $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = 0$ という測地線の方程式となる。従って空間 M の 2 点間の最短ルートは測地線であることが分かる。

空間の中の点 p を基準にしたとき、 p のまわりの座標の取り方は任意であるが、通常のユークリッド空間と同じような直交座標系をとろうと思うのは自然なことである。点 p を始点とした方向をひとつ決めると、その方向へまっすぐに直線を伸ばしたものを x 軸とみなすことになる。この時、この空間 M の中での”まっすぐ”というのは測地線を指すというのはとても自然である。このようにして点 p を始点とする、互いに直交する n 個の方向ベクトルを選び、それらを初期値とした測地線を引くことで座標系を作ることができる。空間 M の中での直線とは測地線を意味することになる。このようにしてできる座標系は正規座標系である。正規座標系では点 p の周りでは Christoffel の記号は 0 となるため、点 p の近傍では測地線の方程式は近似的に単なる直線の方程式である。その直線からのずれは曲率で与えられる。

ユークリッド空間での幾何学の基本的な性質で、2 本の平行な直線はどこまでいっても互いに交わらないというのがある。このことは次のように考察できる。点 p を始点とするベクトル $\mathbf{v}_1$ を点 q まで平行移動させたものを $\mathbf{v}_2$ とする。それら 2 つのベクトルを初期値とする測地線の方程式から 2 つの測地線を得る。ユークリッド空間ではこれらは交わることがなかったが、今考えているような空間の幾何学ではこれは一般に成り立たない。その平行からのずれもまた曲率テンソルで与えられる。始点 p のベクトル $\mathbf{v}$ を終点 r まで測地線に沿って平行移動してさらに点 s まで平行移動する。一方、点 p から点 q にベクトル $\mathbf{v}$ を平行移動して、 q から終点 s まで測地線に沿って平行移動したベクトルとのずれは、(43) 式より

$$\Delta v^i = -R^i_{jkl} v^j \delta u^k \Delta u^l \quad (94)$$

がそのずれである。従ってこのずれがあるために平行な 2 直線の間はずっと平行とならずにいずれ交わったり逆に離れていったりする。Christoffel の記号や Riemann の曲率は計量が与えられれば決定することができる。この意味で空間の中での直線 (= 測地線) や平行性、長さ、体積といったものがユークリッド空間からどれくらいずれているかが決定できる。ここまでの議論を見返してみると次のことが言える。空間における計量のユークリッド計量からのずれは空間の曲がりを表す。ある場所にある物差しの長さが別の場所に持ってきた時に同じ物差しなので同じ目盛りを刻んでいるが、実際の長さが場所によって変わっていたりあるいは実は曲がっていたりといったことを検知する方法があるということを示唆している。アインシュタインの一般相対性理論はこれらの事情をちょうど含んだ理論となっている。相対性理論はこの空間の曲がりともうひとつ特殊相対性理論からくる時間と空間との関係まで含めた物理の幾何学理論である。現実の物理世界では理想的な直線を用意することが難しいが、相対性理論では光の進む道が直線すなわち測地線の役割を果たしている。このノートは幾何学の数学的な理解や直観を得ることを目的としているため相対性理論の話題にこれ以上踏み込むことはしないでおきたい。興味のある方には [5] などをおすすめしたい。

参考文献

- [1] TKG. 幾何のお話 2. <https://sciencehub.tk-labo.com/html/HhT7fIWUfBv2j9pCmf5i>.
- [2] 茂木勇, 伊藤光弘. 微分幾何学とゲージ理論. 共立出版, 2001.
- [3] 小林昭七. 接続の微分幾何とゲージ理論. 裳華房, 2004.
- [4] TKG. 幾何のお話. <https://sciencehub.tk-labo.com/html/fgCVBfrMfBdhVK16l1jm5>.
- [5] 平川浩正. 相対論. 共立出版, 2011.