鏡像法について

TKG

2026 年 2 月 17 日

目 次

1 INTRODUCTION **1**

2 2 次元ポテンシャル流の鏡像法について **1**

3 3 次元の静電場においての鏡像法について **2**

1 INTRODUCTION

静電ポテンシャルの鏡像法というものがあるが、それについて解説をしたい。その解説にあたって 3 次元の静電ポテンシャルの鏡像法に対して類似の 2 次元流体力学におけるポテンシャル流でも鏡像法がある。ここではそれらの 2 つを同じ鏡像法という同一の名称で表すことからその両方を解説したい。名前が似ているだけではなく考え方にも類似点がある。その名前が指すとおりに本来のソースが作るポテンシャルに対して鏡像の位置にあるソースが作るポテンシャルを考えることで境界面では一定の値を持つ新しいポテンシャルが得られる。ポテンシャルの勾配が流速ベクトルあるいは電磁場を与えるので結果として流速ベクトルあるいは電磁場が境界面上で境界面に垂直になる。詳しく立ち入って物理の解説を行うことはここではしないのでもしかしたら初学者には少し難しいかもしれないがご容赦いただきたい。ポイントを絞って解説しているので分かりやすいと思う人もいるかもしれないし、簡潔すぎてわからないという方もいるかもしれない。詳しい解説を求める方はものの本を参照していただきたい。流体力学に関しては個人的には [1] をオススメしたい。電磁力学については [2] などを参照されたい。また手前味噌ではあるが [3] で電磁力学を解説しているので参照されたい。厚い本を一冊読むよりは負担が少ないかもしれない。

2 2 次元ポテンシャル流の鏡像法について

2 次元の場合の鏡像法は流体力学での 2 次元のポテンシャル流の方法による方法が有名である [1]。2 次元のポテンシャル流での鏡像法は円周に沿う速度ベクトルを求める方法である。2 次元のポテンシャル流では 2 次元の速度ベクトル（ここでは簡単に 1-form として扱う）$\mathbf{v}$ は非圧縮であること、即ち $\mathrm{d} * \mathbf{v} = 0$ より $\mathbf{v} = *\mathrm{d}\psi$ となり、渦無しであること即ち $\mathrm{d}\mathbf{v} = 0$ より $\mathbf{v} = \mathrm{d}\phi$ となる。ここで $*$ はホッジ双対を表す。2 次元であるので $*\mathbf{v}$ も 1-form であることを考慮して速度ポテンシャル $f = \phi + i\psi$ が定義できる。$\mathbf{v}$ とは

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\phi = *\mathrm{d}\psi \tag{1}$$

の関係がある。2 次元の場合にはホッジ作用素はそのベクトルに直交するベクトルを与えるので $\mathrm{d}\psi$ は $\mathrm{d}\phi$ と直交している。これらの関係式は f に対してのコーシー・リーマンの関係式を与える。$\mathbf{v} = u \cdot \mathrm{d}x + v \cdot \mathrm{d}y$ に対して複素速

度 $\mathbf{v} = u + iv$ を定義すると、このことから $z = x + iy$ に対しての正則関数 $f(z)$ に対して

$$u - iv = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \tag{2}$$

の関係が見出される。ここまでをまとめると正則関数 $f(z)$ は 2 次元の非圧縮で渦無しのポテンシャル流を表している。速度ベクトルとの関係は (2) で与えられる。さてこの $f(z)$ に対して鏡像の関係にある $f^*(1/z^*)$（これは z の正則関数となる）との和

$$F(z) = f(z) + f^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \tag{3}$$

を考えると $|z| = 1$ に制限して考えると $zz^* = |z|^2 = 1$ なので

$$F(z) = f(z) + f^*(z) \tag{4}$$

となるので $|z| = 1$ に対しては $F(z)$ は実関数である。$F = \Phi + i\Psi$ もポテンシャル流を表すが F が $|z| = 1$ の単位円上では実関数であるので F の虚部は 0 である。即ち $\mathrm{d}\Psi$ は単位円周上では円周の接線ベクトルと直交している。$\mathrm{d}\Phi$ と $\mathrm{d}\Psi$ は直交しているので $\mathrm{d}\Phi$ は単位円周上では円周に沿うベクトルとして与えられる。即ち単位円周に沿う速度ベクトルが得られた。

3　3 次元の静電場においての鏡像法について

3 次元 Euclid 空間中に単位球の導体があり、その外側に 1 つだけ電荷 Q の粒子が作る静電ポテンシャルは類似の導出ができて鏡像法と呼ばれている。以下では鏡像法がなぜそのような単位球の導体があるときに 1 つの電荷が作る静電ポテンシャルが鏡像法で得られるのかを簡単な計算で理解できるということを解説する。

3 次元 Euclid 空間での静電ポテンシャルを考える。ソースが $\mathbf{a}$ にある場合の静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \tag{5}$$

で与えられる。このポテンシャルに対して電磁場は $\mathbf{E} = \mathrm{d}\phi$ より

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -Q\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3} \\ &= -Q\frac{\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3} + Q\frac{\mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3}\end{aligned} \tag{6}$$

で与えられる。2 行目の式の第 1 項目は原点から外向きに向かう方向なので $|\mathbf{x}| =$ 一定の球の曲面に接するベクトルと直交していることに注意されたい。これに対して $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$ にソースがある場合を考えると

$$\phi'(\mathbf{x}) = \frac{Q'}{\left|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right|} \tag{7}$$

であるがこの場合には電磁場 $\mathbf{E}' = \mathrm{d}\phi'$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= -Q'\frac{\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}}{\left|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right|^3} \\ &= -Q'\frac{\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}}{\left|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right|^3} + Q'\frac{|\mathbf{a}|\ \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}}{|\mathbf{a}|^3\left|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right|^3}\end{aligned} \tag{8}$$

この式の 2 行目の第 1 項目もまた $|\mathbf{x}|=$ 一定の球の曲面に接するベクトルとは直交している。今 $|\mathbf{x}|=1$ の単位球の曲面に制限すると

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}|^2\left|\mathbf{x}-\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right|^2 &= \mathbf{a}^2\left(1+\frac{\mathbf{a}^2}{|\mathbf{a}|^4}-2\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{a}|^2}\right)\\ &= \mathbf{a}^2+1-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\\ &= |\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2\end{aligned} \tag{9}$$

であるので $Q'=-\frac{Q}{|\mathbf{a}|}$ の時、

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x})+\phi'(\mathbf{x})\\ &= \frac{Q}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}-\frac{Q}{||\mathbf{a}|^2\mathbf{x}-\mathbf{a}|}\end{aligned} \tag{10}$$

の作る静電場は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}+\mathbf{E}' &= -Q\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}-Q'\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}{\left|\mathbf{x}-\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right|^3}+Q\frac{\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}-Q\frac{\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}\\ &= -Q\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}-Q'\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}}{\left|\mathbf{x}-\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right|^3}\\ &= -Q\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}-\frac{|\mathbf{a}|^2}{||\mathbf{a}|^2\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}\right)\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}\end{aligned} \tag{11}$$

となるので $|\mathbf{x}|=1$ の単位球の曲面と直交していることが分かる。

参考文献

[1] 今井功. 流体力学. 裳華房.

[2] 砂川重信. 理論電磁気学. 紀伊国屋書店.

[3] TKG. 電磁力学. https://sciencehub.tk-labo.com/abstract/SvUwu8a2MGe0swBYyeCK.