

勾配がいちばん増える向きになるところを、図で見直した

うすくも

2026 年 8 月 2 日

多変数関数の講義で、勾配は関数がいちばん速く増える向きを表す、と出てきました。偏微分を並べて勾配を計算するところまではできたのですが、なぜそれが向きまで表すのかは講義中には分かりませんでした。方向微分の式を見直して、例を一つ計算し、ノートに等高線を描いてみました。今回はそのときに確認した範囲だけです。

1 方向微分をもう一度見る

点 (a, b) から、単位ベクトル

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

の向きに少し動くことを考えます。 t だけ動いたところでの関数の値を

$$g(t) = f(a + tu_1, b + tu_2)$$

とおくと、この向きへの方向微分は $g'(0)$ です。合成関数の微分を使うと

$$g'(0) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2 \quad (1)$$

$$= (f_x(a, b), f_y(a, b)) \cdot (u_1, u_2) \quad (2)$$

$$= \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

となります。

講義では最後の式だけを見ていたので、偏微分を並べたものが急にベクトルとして出てきたように感じていました。実際には、動く向きの成分 u_1, u_2 と掛けるために、この並び方になっています。

2 一つの関数で計算する

次の関数を考えました。

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

偏微分は

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 4y$$

なので、点 $(1, 1)$ での勾配は

$$\nabla f(1, 1) = (2, 4)$$

です。ここから単位ベクトル

$$\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

の向きに動くとき、方向微分は

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u} \quad (4)$$

$$= 2 \cos \theta + 4 \sin \theta \quad (5)$$

となります。

内積を二つのベクトルの長さで書けば、

$$\nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u} = |\nabla f(1, 1)| |\mathbf{u}| \cos \theta'$$

です。ここで θ' は勾配と $\mathbf{u}$ の間の角です。 $|\mathbf{u}| = 1$ で、 $\cos \theta'$ がいちばん大きいのは $\theta' = 0$ のときなので、方向微分は勾配と同じ向きで最大になります。

この例では

$$|\nabla f(1, 1)| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

なので、最大になる方向と、そのときの方向微分は

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \quad D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = 2\sqrt{5}$$

になります。

3 等高線を描いてみる

$f(x, y) = c$ とすると

$$x^2 + 2y^2 = c$$

なので、等高線は横長の楕円になります。点 $(1, 1)$ を通る等高線は $c = 3$ です。ノートに何本か描いて、 $(1, 1)$ から勾配 $(2, 4)$ の向きに矢印を引きました。

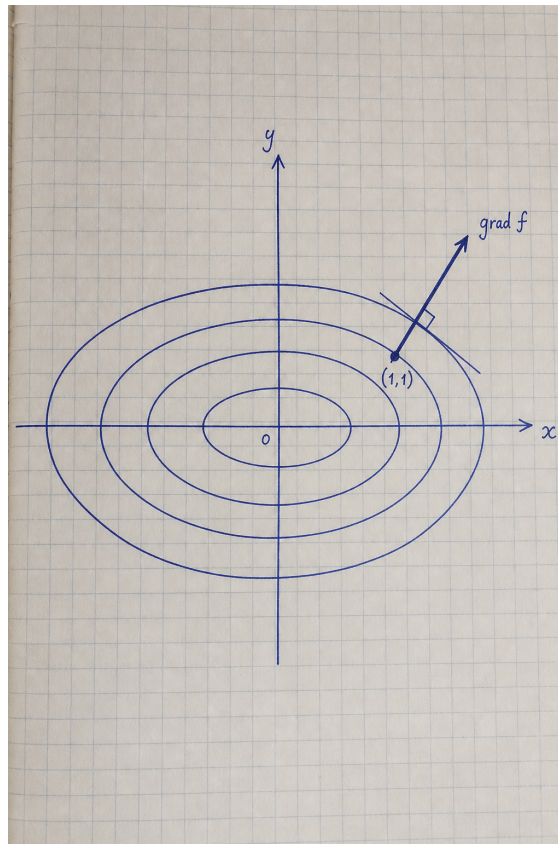


図 1：等高線と $(1, 1)$ での勾配を描いたもの

図を見ると、勾配は点 $(1, 1)$ を通る楕円を横切る向きになっています。一方で、等高線に沿って動くなら関数の値は変わらないので、その向きへの方向微分は 0 です。

接線との直角も計算してみました。 $x^2 + 2y^2 = 3$ を x で微分すると

$$2x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

で、 $(1, 1)$ での接線の傾きは $-1/2$ です。勾配 $(2, 4)$ の向きの傾きは 2 なので、二つを掛けると -1 になり、たしかに直角です。

4 今のところの理解

勾配がいちばん増える向きだという説明を、最初は等高線の図だけの話だと思っていました。方向微分が $\nabla f \cdot \mathbf{u}$ と書けるので、動く向きを変えたときの変化率をまとめて持っているのが勾配なのだと分かりました。

今回は $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ の一点で確認しただけです。等高線がもっと複雑な形でも同じように見えるのかは、まだ図にしています。