

幾何のお話

TKG

2025 年 4 月 9 日

目次

1 INTRODUCTION

2 ベクトル場

3 微分形式

3.1 $\Gamma(TM^*)$

3.2 テンソル積と外積

3.3 外微分

4 計量空間

4.1 体積要素

5 DUAL テンソル

6 空間成分と時間成分に分けて考えること

7 応用例 1

8 応用例 2

8.1 通例の極座標表示

8.2 もう一つの極座標の取り方

1 INTRODUCTION

出来るだけ簡単かつ直観的な幾何学の説明をする。
ここではこのための準備をする。

はじめに物理において幾何学を用いることが適している
と考える理由から述べよう。例えば、粒子が適当な運動
をしているとしよう。その時、普通はある適当な座標系
を選んでこの粒子の運動を記述するだろう。しかし、ど
んな座標系を選ぶかということ

は物理的に本質的なことではないだろう。或いは、な
にかある現象を語る際に、なにか特別な座標系に固

執しなければならない理由はない。電荷が保存する
ことは座標系の取り方とは無関係であるはずである。

以上のことから、物理を座標系の取り方によらな
いように記述することは理にかなっている。それば
かりかそのように記述することにより多くのことが
簡略化される。

はじめのうちは、座標系を具体的ににとって議論し
ているが、もちろんはじめから座標を具体的に表す
ことなく議論することも出来るが、分かりやすさを
何よりも重視したかったので、敢えて座標系を具体
的ににとって話を展開した。それでもその座標系の取
り方は任意であり、また、次第に成分を具体的に書
くことが少なくなるであろう。

幾何学とおおざっぱに言ってきたが、具体的には
対象とするのは可微分多様体というものである。直
観的にこれを説明すると、例えば、Euclid 空間のよ
うな、その空間のどの点を取っても、その点の十分
近くでは座標系（直交座標系である必要はない）を
取ることが出来るようなもの。実質的には、考えて
いる空間の次元より大きな次元を持つ空間のある部
分空間と考えて良い。以下ではその空間を M で表
し、その空間の次元は n 次元であるとする。

ここでは主に微分形式について、その扱いや概念
に慣れることを目的にしているので、あまり詳しく
は書いてない。

2 ベクトル場

空間 M に、ある座標系

$$\mathbf{q} := (q^1, q^2, \dots, q^n)$$

をとる。 M の各点で定義されたベクトル

$\mathbf{v} = (v^1(\mathbf{q}), v^2(\mathbf{q}), \dots, v^n(\mathbf{q}))$ と連立微分方程式

$$\frac{dq_t^i}{dt} = v^i(\mathbf{q}_t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

が与えられた時、この連立微分方程式を解くことで与えられる

$$\mathbf{q}_t = (q_t^1, q_t^2, \dots, q_t^n)$$

を t をパラメーターとした曲線という。

$t = 0$ での位置 $\mathbf{q}$ を決めれば (1) 式から任意の t での $\mathbf{q}_t$ が一意的に定まる。

$$\mathbf{q}_t =: \phi_t(\mathbf{q}) \quad (2)$$

とし、 ϕ_t を flow という。

ϕ_t は

$$\phi_t \cdot \phi_s = \phi_{t+s} \quad (3)$$

$$\phi_0 = 1 \quad (4)$$

を満たす。

M 上の関数 $f(\mathbf{q})$ に対し、 ϕ_t^* を

$$\phi_t^* f(\mathbf{q}) := f(\mathbf{q}_t) \quad (5)$$

と定める。この時、 f の $\mathbf{v}$ に沿った微分 (フロー微分) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t^* f(\mathbf{q}) &= \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}_t) \\ &= v^i(\mathbf{q}_t) \frac{\partial f(\mathbf{q}_t)}{\partial q_t^i} \\ &= v^j(\mathbf{q}) \frac{\partial q_t^i}{\partial q^j} \frac{\partial f(\mathbf{q}_t)}{\partial q_t^i} \\ &= v^j(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^j} f(\mathbf{q}_t) \\ &= v^j(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^j} \phi_t^* f(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (6)$$

従って、

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* = v^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \phi_t^* \quad (7)$$

が成り立つ。よって、形式的には

$$\frac{d}{dt} = v^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (8)$$

と書ける。これを

$$\bar{\mathbf{v}} := v^i \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \quad (9)$$

と書き、ベクトル場または 1-vector という^{1 2}。

2 つのベクトル場 $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}}$ 及び、 M 上の関数 $\alpha(\mathbf{q}), \beta(\mathbf{q})$ に対し、

$$\alpha \bar{\mathbf{u}} + \beta \bar{\mathbf{v}} := (\alpha v^i + \beta u^i) \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (12)$$

もまた、ベクトル場となる。よってベクトル場全体はベクトル空間をなす。これを $\Gamma(TM)$ と書く³。

M にもう 1 つの座標系 $\mathbf{Q}$ をとり、もとの $\mathbf{q}$ と

$$Q^i = Q^i(q^1, q^2, \dots, q^n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

の関係⁴ があるとする ($\mathbf{q}$ と $\mathbf{Q}$ は空間 M の同一の点を異なる座標系で表しているにすぎない)。ベクトル場 $\bar{\mathbf{v}}$ は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \\ &= V^j \frac{\partial}{\partial Q^j} \end{aligned} \quad (15)$$

¹関数 f の $\mathbf{v}$ に沿った微分は

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{q}_t) = \bar{\mathbf{v}} f(\mathbf{q}_t) \quad (10)$$

とも書ける。

²(7) より ϕ_s^* の形式解は

$$\begin{aligned} \phi_s^* &= e^{s \frac{d}{dt}} \\ &= e^{s \bar{\mathbf{v}}} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。一段目の右辺はテイラー展開に対応している。

³ TM をベクトル束 (ベクトルバンドル) という。その切断全体からなる集合が $\Gamma(TM)$ である。即ちベクトル場とはベクトル束 TM の切断である。詳しくは”ゲージ理論”を参照のこと。

⁴もちろん

$$q^i = q^i(Q^1, Q^2, \dots, Q^n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

でもある。

となる⁵。この時、

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \\ &= v^i \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial Q^j} \\ &= V^j \frac{\partial}{\partial Q^j}.\end{aligned}\quad (16)$$

よって成分は

$$V^j = v^i \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \quad (17)$$

なる変換則に従うことが分かる。逆に (17) の変換をする成分はベクトル場の成分とみなせる。

以上のようにベクトル場は座標の取り方によらない。このようにベクトル場とはいわば、ベクトルを（または微分を）座標系の取り方によらないように表現したものである。

3 微分形式

3.1 $\Gamma(TM^*)$

今、空間 M （座標系を $\mathbf{q}$ として）上の曲線 C に沿って

$$\tilde{\theta} := \theta_i dq^i \quad (18)$$

を線積分することを考える。この時、別の座標系 $\mathbf{Q}$ に対し

$$\tilde{\theta} = \Theta_j dQ^j \quad (19)$$

であるとする、座標変換 (13) の下で

$$\begin{aligned}\int_C \tilde{\theta} &= \int_C \Theta_j dQ^j \\ &= \int_C \Theta_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} dq^i\end{aligned}\quad (20)$$

となる。よって $\tilde{\theta}$ の成分は

$$\theta_i = \Theta_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \quad (21)$$

と変換する。(18) の形の $\tilde{\theta}$ で、成分が (21) のように変換するもの全体の集合を $\Gamma(TM^*)$ で表す。また、そのような $\tilde{\theta}$ を 1-form と呼ぶ。 $\Gamma(TM^*)$ もまたベクトル空間となる⁶。

ここで 1-vector $\bar{\mathbf{v}}$ と、1-form $\tilde{\theta}$ の縮約 $\tilde{\theta}[\bar{\mathbf{v}}]$ を

$$\tilde{\theta}[\bar{\mathbf{v}}] := \theta_i v^i \quad (22)$$

と定義する。これは (17)(21) より

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}[\bar{\mathbf{v}}] &= \theta_i v^i \\ &= \Theta_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} v^i \\ &= \Theta_j V^j\end{aligned}\quad (23)$$

となり、座標系の取り方によらない。特に 1-vector $\frac{\partial}{\partial q^i}$ と 1-form dq^j に対しては

$$dq^j \left[\frac{\partial}{\partial q^i} \right] = \delta_i^j \quad (24)$$

である。また、 f の全微分（これも 1-form）

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i \quad (25)$$

と 1-vector

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= \frac{dq^i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^i} \\ &= \frac{d}{dt}\end{aligned}$$

の縮約は

$$\begin{aligned}df[\bar{\mathbf{v}}] &= \frac{dq^i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^i} \\ &= \frac{df}{dt} \\ &= \bar{\mathbf{v}}f\end{aligned}\quad (26)$$

となる。つまり $df[\bar{\mathbf{v}}]$ は f の、ベクトル場 $\bar{\mathbf{v}}$ に沿った微分（フロー微分）を与える。

1-form $\tilde{\theta}$ と 1-vector $\bar{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} = v^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ が与えられれば、連立微分方程式 (1) から、曲線 $\mathbf{q}_t$ が定まる。

⁵ 上述の議論において、どんな座標系をとるかは関係なかったことに注意せよ。

⁶ ここでもベクトル場の時と同様に 1-form 全体からなる集合は、ベクトル束 TM^* の切断全体の集合 $\Gamma(TM^*)$ である。以降に出てくる p-form、p-vector 全体からなる集合も同様である。

この曲線の $t = 0$ から t までの範囲を C_t と書くと、 $\tilde{\theta}$ の C_t に沿った積分は

$$\begin{aligned}\int_{C_t} \tilde{\theta} &= \int_{C_t} \theta_i dq^i \\ &= \int_0^t \theta_i \frac{dq^i}{dt} dt \\ &= \int_0^t \theta_i v^i dt \\ &= \int_0^t \tilde{\theta}[\bar{\mathbf{v}}] dt\end{aligned}\quad (27)$$

となる。これを単に $\tilde{\theta}$ の $\bar{\mathbf{v}}$ に沿った積分と呼ぶことにする。つまり、 $\tilde{\theta}$ の $\bar{\mathbf{v}}$ に沿った積分とは $\tilde{\theta}$ と $\bar{\mathbf{v}}$ の縮約を $\bar{\mathbf{v}}$ のパラメータ t で積分したものである。よってこれも当然ながら座標系の取り方によらない。

3.2 テンソル積と外積

ここまでで、ベクトルや微分や線積分というものが座標系の取り方によらないように表現できた。このように、さらに面積分や体積積分のようなより高次元の領域にわたる積分も座標系の取り方によらないように表現することが出来る。

2つの 1-form $\tilde{\theta}, \tilde{\omega}$ に対し、そのテンソル積を

$$\tilde{\theta} \otimes \tilde{\omega}[\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}}] := \tilde{\theta}[\bar{\mathbf{v}}] \tilde{\omega}[\bar{\mathbf{u}}] \quad (28)$$

で定める。(⊗ を省いて書くこともある) また、外積を

$$\tilde{\theta} \wedge \tilde{\omega} := \tilde{\theta} \otimes \tilde{\omega} - \tilde{\omega} \otimes \tilde{\theta} \quad (29)$$

で定める。 $\tilde{\theta}$ と $\tilde{\omega}$ のテンソル積は

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} \otimes \tilde{\omega} &= \theta_i \omega_j dq^i \otimes dq^j \\ &= (\tilde{\theta} \otimes \tilde{\omega})_{ij} dq^i \otimes dq^j\end{aligned}\quad (30)$$

とも書ける。そこで一般に 2 階共変テンソル $\tilde{\omega}$ を

$$\tilde{\omega} := \omega_{ij} dq^i dq^j \quad (31)$$

で定める。この意味は

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}[\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}}] &:= \omega_{ij} dq^i[\bar{\mathbf{v}}] dq^j[\bar{\mathbf{u}}] \\ &= \omega_{ij} u^i v^j\end{aligned}\quad (32)$$

で定まる。さらにこれを一般化して、1-form, $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_p$ に対し、それらのテンソル積を

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1 \otimes \tilde{\theta}_2 \otimes \dots \otimes \tilde{\theta}_p[\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_p] \\ = \tilde{\theta}_1[\bar{\mathbf{v}}_1] \tilde{\theta}_2[\bar{\mathbf{v}}_2] \dots \tilde{\theta}_p[\bar{\mathbf{v}}_p]\end{aligned}\quad (33)$$

で定める。また、一般に p 階共変テンソルを

$$\tilde{\omega} := \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} dq^{i_1} dq^{i_2} \dots dq^{i_p} \quad (34)$$

で定める。 p 階共変テンソル全体からなる集合を $\Gamma(\otimes^p TM^*)$ と書く。明らかにこれはベクトル空間となる。外積に関しても同様にして

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2 \wedge \dots \wedge \tilde{\theta}_p \\ = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_p} \tilde{\theta}_{i_1} \otimes \tilde{\theta}_{i_2} \otimes \dots \otimes \tilde{\theta}_{i_p}\end{aligned}\quad (35)$$

で定める。ここで $\sum$ は $i_1 \sim i_p$ のそれぞれについて 1 から p までの和をとり、また $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_p}$ は

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_p} := \begin{cases} 1 & (i_1, \dots, i_p) \text{ が even} \\ -1 & (i_1, \dots, i_p) \text{ が odd} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (36)$$

とする。一般に

$$\tilde{\omega} = \omega_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \quad (37)$$

を p -form (p 形式) という^{7 8}。また、0-form を M 上の関数と定義しておく。 p -form 全体からなる集合

⁷一応注意しておくが、定義により

$$dq^i \wedge dq^j = -dq^j \wedge dq^i$$

である。よって、 $i = j$ の時 0 になる。

⁸任意の p -form $\tilde{\omega}$ 、 q -form $\tilde{\theta}$ に対し、それらの外積は

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\theta} = \omega_{i_1 \dots i_p} \theta_{j_1 \dots j_q} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \wedge dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_q}$$

となる。脚注 5 より、これは $p + q > n$ の時 0 になる。また、0-form (関数) f と q -form $\tilde{\omega}$ との外積を

$$f \wedge \tilde{\omega} = f \tilde{\omega}$$

で定義しておく。このあとに出てくる p -vector についても同様。

を $\Gamma(\bigwedge^p TM^*)$ と書く。これもまたベクトル空間となる。

ここで、今 p 階共変テンソル

$$\tilde{\theta} = \theta_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \dots dq^{i_p}$$

($\otimes$ は省いた) の成分が任意の 2 つの添え字 i_α, i_β の入れ替えに対して

$$\theta_{i_1 \dots i_\alpha \dots i_\beta \dots i_p} = \theta_{i_1 \dots i_\beta \dots i_\alpha \dots i_p} \quad (38)$$

であるとき完全対称 (共変) テンソルという。右辺が -1 倍になるとき完全反対称 (共変) テンソルという。

任意の完全反対称共変テンソル $\tilde{\theta}$ に対して、

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \theta_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \dots dq^{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \theta_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \\ &= \frac{\theta_{i_1 \dots i_p}}{p!} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \end{aligned} \quad (39)$$

となることから、 p 階の完全反対称共変テンソルと p -form とは上のようにして 1 対 1 に対応する。

ベクトル場に対してもテンソル積が定まる。即ち、一般に p 階反変テンソルを

$$\bar{\mathbf{F}} := F^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial q^{i_p}} \quad (40)$$

と書き、意味は p 階共変テンソル $\tilde{\omega}$ に対して

$$\tilde{\omega}[\bar{\mathbf{F}}] := \omega_{i_1 \dots i_p} F^{i_1 \dots i_p} \quad (41)$$

で定める。 p 階反変テンソル全体からなる集合 (ベクトル空間) を $\Gamma(\bigotimes^p TM)$ と書く。また、外積も共変テンソルのように

$$\bar{\mathbf{v}}_1 \wedge \bar{\mathbf{v}}_2 \wedge \dots \wedge \bar{\mathbf{v}}_p := \sum \varepsilon_{i_1 \dots i_p} \bar{\mathbf{v}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{v}}_{i_p} \quad (42)$$

で定める。一般に

$$\bar{\mathbf{F}} = F^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial q^{i_p}} \quad (43)$$

と書け、これを p -vector という。 p -vector 全体からなる集合 (ベクトル空間) を $\Gamma(\bigwedge^p TM)$ と書く。こ

の場合も p 階完全反対称反変テンソルと p -vector は 1 対 1 に対応する⁹。

0-vector をやはり M 上の関数と定義する。即ち、関数は 0-form でもあり 0-vector でもある。

前の 1-form の時のように、(39) の p -form $\tilde{\theta}$ と、空間 M の p 次元の (有界な) 部分空間 M_p の (M_p に新たに取った任意の) 座標系 $(t_1, t_2, \dots, t_p)$ に対して、それに対応するベクトル場 $\bar{\mathbf{v}}_1 = \frac{d}{dt_1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_p = \frac{d}{dt_p}$ が与えられると

$$\begin{aligned} &\int_{M_p} \tilde{\theta}[\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_p] dt_1 \dots dt_p \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \int_{M_p} \tilde{\theta}_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} [\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_p] dt_1 \dots dt_p \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \int_{M_p} \tilde{\theta}_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(q^{i_1}, \dots, q^{i_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} dt_1 \dots dt_p. \end{aligned}$$

ここで上の積分の行列式が全て正であるとする、(Jacobian がこの行列式の絶対値であることに注意すると) この積分は単に

$$\begin{aligned} &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \int_{M_p} \tilde{\theta}_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \dots dq^{i_p} \\ &=: \int_{M_p} \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (44)$$

となる。これは M_p の座標系をどう取ったかによらない。これを単に $\tilde{\theta}$ の M_p 上の積分と呼ぶことにする。

このように p -form は p 次元の領域の積分を、座標系の取り方によらないように表現したものといえる。

⁹任意の p -form や p -vector を (以下の議論ではどちらであっても同じなので p -form とする)

$$\tilde{\theta} = \theta_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

と書いたとしても、 $\theta_{i_1 \dots i_p}$ が完全反対称とはならないが、それでも $\tilde{\theta}$ を

$$\tilde{\theta} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left[\varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \theta_{j_1 \dots j_p} \right] dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}$$

と書きなおすことで、常に p -form の成分を完全反対称な形にすることが出来る。ただし、 $\varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}$ は $(i_1 \dots i_p)$ から $(j_1 \dots j_p)$ の置換が偶ならば $+1$ 、奇ならば -1 、それ以外で 0 とする。以下では特に断らなければ、 p -form や p -vector の成分を書いたときには完全反対称になっているとする。

3.3 外微分

M 上の関数 $f(\mathbf{q})$ に対し、その外微分 df を通常
の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i \quad (45)$$

で定義する。 $p(\geq 1)$ に対しては、 p -form

$$\tilde{\omega} = \omega_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \dots dq^{i_p} \quad (46)$$

の外微分を、 $p+1$ -form

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega} &:= d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \\ &= \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial q^{i_0}} dq^{i_0} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \end{aligned} \quad (47)$$

で定義する¹⁰。外微分 d は形式的に

$$d = dq^i \wedge \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (48)$$

と書ける。 $\frac{\partial}{\partial q^i}$ は q^i の偏微分を表す。

この外微分はいわゆる Stokes の定理を座標系によらないように表すのに使われたりする。ここでは証明を省いて結果だけ載せる。かなりおおざっぱなので、詳しいことはものの本を読みたい。

(1) [Stokes の定理] 向きづけられた¹¹空間 M のある $p+1$ 次元の領域を D 、及び D の表面 (p 次元) を ∂D とし、 $\bar{D}$ がコンパクトである時、任意の p -form $\tilde{\omega}$ に対し

$$\int_{\partial D} \tilde{\omega} = \int_D d\tilde{\omega}. \quad (49)$$

その他の外微分の性質についても証明なしで載せる。(しかしかなり重要な性質)

(2) 任意の p -form $\tilde{\omega}$ に対し

$$dd\tilde{\omega} = d^2\tilde{\omega} = 0. \quad (50)$$

¹⁰(47) の最後の式はその成分が完全反対称ではないが、脚注 10 のようにして完全反対称化できる。

¹¹向きづけられたの意味は後述する。体積要素の節を参照のこと。

これはすぐに確かめられる。

(3) [ポアンカレの補題] M が $\mathbb{R}^n$ と微分同型であるとき¹²、 p -form $\tilde{\omega}$ が M 上の至るところで $d\tilde{\omega} = 0$ となるならば、ある $p-1$ -form $\tilde{\theta}$ があり

$$\tilde{\omega} = d\tilde{\theta} \quad (51)$$

と書ける。

4 計量空間

今、空間 M が Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ であるとする。その座標系を通常直交座標系にとり、それを $\mathbf{x}$ としたとき、線素 ds^2 は

$$\begin{aligned} ds^2 &:= \sum_{i=1}^n dx^i dx^i \\ &= \delta_{ij} dx^i dx^j \end{aligned} \quad (52)$$

である。これを $\mathbf{x}$ から別の座標系 $\mathbf{q}$ に座標変換した時に、

$$ds^2 = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial q^\nu} dq^\mu dq^\nu$$

と変わる。この時、

$$g_{\mu\nu} := \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial q^\nu} \quad (53)$$

を計量という。これは明らかに添え字の入れ替えに対し、対称である。今、ベクトル場

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &:= v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= v^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \end{aligned}$$

に対して、1-form $\tilde{\mathbf{v}}$ を

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &:= \sum_i v^i dx^i \\ &= \delta_{ij} v^i dx^j \end{aligned} \quad (54)$$

¹²詳しくは、ものの本を調べてもらえばよいが、物理で扱う多くの場合 $\mathbb{R}^n$ と微分同相である。従って、特に断ることがない限りこの条件があると仮定する。このポアンカレの補題は”トポロジー”note のほうで証明する

と対応させる。これは座標系を $\mathbf{q}$ に変換すると

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}} &= \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial q^\nu} \dot{v}^\nu dq^\mu \\ &= g_{\mu\nu} \dot{v}^\mu dq^\nu.\end{aligned}\quad (55)$$

よって $\tilde{\mathbf{v}}$ の成分は

$$g_{\mu\nu} \dot{v}^\mu =: \dot{v}_\nu \quad (56)$$

である。

このようにして、一般に、 $\Gamma(\bigotimes^p TM)$ の元 $\bar{\mathbf{F}}$ を、 $\Gamma(\bigotimes^p TM^*)$ の元 $\tilde{\mathbf{F}}$ に対応させる時も、その成分は計量で添え字を下げたものになる。即ち

$$\bar{\mathbf{F}} = F^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}$$

に対して

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}} &:= F^{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p} \\ &= g_{\mu_1 \nu_1} g_{\mu_2 \nu_2} \dots g_{\mu_p \nu_p} F^{\mu_1 \dots \mu_p} dq^{\nu_1} \dots dq^{\nu_p} \\ &=: \dot{F}_{\nu_1 \dots \nu_p} dq^{\nu_1} \dots dq^{\nu_p}.\end{aligned}\quad (57)$$

逆に $\Gamma(\bigotimes^p TM^*)$ の元 $\tilde{\omega}$ を、 $\Gamma(\bigotimes^p TM)$ の元 $\bar{\omega}$ に対応させる時には、

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho \quad (58)$$

を満たす計量 $g_{\mu\nu}$ の逆行列 $g^{\nu\rho}$ で添え字を上げることになる（計量は対称行列なので逆行列が存在する）。

このようにして計量があれば、それでテンソルの成分の添え字の上げ下げをすることで、 $\Gamma(\bigotimes^p TM^*)$ と $\Gamma(\bigotimes^p TM)$ とを対応させられる。このことを一般化して空間 M が Euclid 空間でない時も、計量が与えられた時には添え字の上げ下げを計量で行うとする。

M に 2 つの座標系 $\mathbf{q}, \mathbf{Q}$ を取った時、線素 ds^2 が

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{ij} dq^i dq^j \\ &= \acute{g}_{\mu\nu} dQ^\mu dQ^\nu\end{aligned}\quad (59)$$

である時、これらの計量の間には

$$\acute{g}_{\mu\nu} = g_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial Q^\mu} \frac{\partial q^j}{\partial Q^\nu} \quad (60)$$

という関係があるのが分かる。即ち、線素は 2 階共変対称テンソルである¹³。

計量の与えられた空間 M において、2 つのベクトル場 $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{u}}$ の内積を

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}}[\tilde{\mathbf{u}}] = \tilde{\mathbf{u}}[\tilde{\mathbf{v}}] &= g_{ij} v^i u^j \\ &= ds^2[\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{u}}]\end{aligned}\quad (61)$$

で定義する。

このようにして計量があり、上のような内積が定義されている空間を計量空間という。計量空間ではベクトル場 $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}$ に対して、それから決まる曲線 C_t の長さ d_t を

$$\begin{aligned}d_t &= \int_0^t \sqrt{ds^2[\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{u}}]} dt \\ &= \int_0^t \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}} dt\end{aligned}\quad (62)$$

として定義する。Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ ではこれは普通の意味での長さになっている。

4.1 体積要素

再び M は Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ とする。 M における体積要素は、直交座標系 $\mathbf{x}$ で

$$\tilde{\sigma} := dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (63)$$

で与えられる n -form である。別の座標系 $\mathbf{q}$ では

$$\tilde{\sigma} = \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \quad (64)$$

となる。ここで

$$\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} =: \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right| > 0 \quad (65)$$

であるとき $\mathbf{x}$ と $\mathbf{q}$ は同じ向きであるという。以下、座標系を取った時には常に $\mathbf{x}$ と同じ向きであるとする。

今、2 つの座標系 $\mathbf{q}, \mathbf{Q}$ に対し、計量 $g_{ij}, \acute{g}_{\mu\nu}$ の行列式をそれぞれ $g, \acute{g}$ と書けば、(60) から

$$\acute{g} = g \left| \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \right|. \quad (66)$$

¹³ 上の例では計量は添え字について対称であった。一般にも計量は対称に定義する。

よって、

$$\sqrt{g} = \sqrt{g} \left| \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \right| \quad (67)$$

となる（この note を通して計量は常に正定値、即ち $g > 0$ であるとする）。特に $\mathbf{x}, \mathbf{q}$ に対しては、

$$\sqrt{g} = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right| \quad (68)$$

となる。従って、体積要素 $\tilde{\sigma}$ は

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{g} dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \quad (69)$$

と書ける。また、これは

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{g} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} dq^{i_1} \cdots dq^{i_n} \quad (70)$$

とも書ける。

$$\sigma_{i_1 \dots i_n} := \sqrt{g} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \quad (71)$$

と置けば、体積要素は

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \sigma_{i_1 \dots i_n} dq^{i_1} \cdots dq^{i_n} \\ &= \frac{\sigma_{i_1 \dots i_n}}{n!} dq^{i_1} \wedge \cdots \wedge dq^{i_n} \end{aligned} \quad (72)$$

とも書ける。

ここでもやはり Euclid 空間でない場合に一般化することが出来る。 M が計量空間であれば、体積要素を

$$\tilde{\sigma} := \sqrt{g} dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \quad (73)$$

で定める。また、計量が備わってない場合でも、 $\sigma_{i_1 \dots i_n} := \sigma \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ (σ は M 上で正の適当な関数) として、

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &:= \sigma dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \\ &= \sigma_{i_1 \dots i_n} dq^{i_1} \cdots dq^{i_n} \\ &= \frac{\sigma_{i_1 \dots i_n}}{n!} dq^{i_1} \wedge \cdots \wedge dq^{i_n} \end{aligned}$$

で体積要素を定義できる¹⁴。ここで注意。一般的な空間 M で考えた時、一般的には体積要素があると

¹⁴従って計量空間であれば

$$\sigma = \sqrt{g}$$

である。

ところで 0 になる場合がありうる。そのような縮退が起きる時、空間から縮退の起きる点を M からくり抜いてできる新しい空間に対して計量が定義されていると考えればよい。

最後に、この節の最初で座標系の向きという概念に触れたが、この向きという概念を空間全体に対して定義することができる。即ち、変換行列の行列式が空間全体において常に正であるように選ぶことが出来る時、 M は向き付け可能という。

5 DUAL テンソル

M に体積要素 $\tilde{\sigma}$ が備わっているとする。完全反対称な p 階反変テンソル (p -vector)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= F^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_p} \\ &= \frac{F^{i_1 \dots i_p}}{p!} \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_p} \end{aligned}$$

に対し ($\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$ とする)、 n - p -form

$$\begin{aligned} \star \bar{\mathbf{F}} &= \frac{\sigma_{i_1 \dots i_n} F^{i_1 \dots i_p}}{p!(n-p)!} dq^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dq^{i_n} \\ &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ i_{p+1} < \dots < i_n}} \sigma_{i_1 \dots i_n} F^{i_1 \dots i_p} dq^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dq^{i_n} \\ &= \sigma_{i_1 \dots i_n} F^{i_1 \dots i_p} dq^{i_{p+1}} \cdots dq^{i_n} \end{aligned} \quad (74)$$

を $\bar{\mathbf{F}}$ の dual テンソルという。

完全反対称な p 階共変テンソル (p -form)

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \cdots dq^{i_p} \\ &= \frac{\omega_{i_1 \dots i_p}}{p!} dq^{i_1} \wedge \cdots \wedge dq^{i_p} \end{aligned}$$

に対し、 n - p -vector

$$\begin{aligned} \star \tilde{\omega} &:= \frac{\sigma^{i_1 \dots i_n} \omega_{i_{n-p+1} \dots i_n}}{p!(n-p)!} \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_{n-p}} \\ &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{n-p} \\ i_{n-p+1} < \dots < i_n}} \sigma^{i_1 \dots i_n} \omega_{i_{n-p+1} \dots i_n} \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_{n-p}} \\ &= \sigma^{i_1 \dots i_n} \omega_{i_{n-p+1} \dots i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{n-p}} \end{aligned} \quad (75)$$

を $\tilde{\omega}$ の dual テンソルという。ただし

$$\sigma^{i_1 \dots i_n} := \frac{1}{\sigma} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}. \quad (76)$$

よって、完全反対称テンソル $\bar{\mathbf{F}}, \tilde{\omega}$ に対し

$$**\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (77)$$

$$**\tilde{\omega} = \tilde{\omega} \quad (78)$$

となる（計量が負定値、即ち $g < 0$ であるならば－符号が付く。しかしこの note ではその場合についてはこれ以上触れない）¹⁵¹⁶。

6 空間成分と時間成分に分けて考えること

この章では、物理への応用の際に（たぶん）便利な方法を 1 つ説明する。それは、時間成分 t を含めて微分形式を扱うことが多々あるが、場合によりそれを空間成分と時間成分とに分けることがある。それをスムーズに行うための方法である。

空間 M が $n+1$ 次元であるとし、座標系を

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= (z^0, z^1, z^2, \dots, z^n) \\ &= (t, q^1, q^2, \dots, q^n) \end{aligned}$$

とする。体積要素を

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \sigma dz^0 \wedge dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \\ &= \sigma dt \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \end{aligned} \quad (79)$$

¹⁵通常は p-form $\tilde{\omega}$ の dual テンソルは、vector の dual テンソルと同じように

$$*\tilde{\omega} = \sigma^{i_1 \dots i_n} \omega_{i_1 \dots i_p} \partial_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \partial_{i_n}$$

で定義される。その時は (77)(78) の代わりに

$$**\bar{\mathbf{F}} = (-1)^{p(n-p)} \bar{\mathbf{F}}$$

$$**\tilde{\omega} = (-1)^{p(n-p)} \tilde{\omega}$$

というふうに符号が出てくる。

¹⁶dual テンソルの定義 (74)(75) で、p-form や p-vector の成分が完全反対称にしていることに注意。従って実際に dual テンソルを計算しようとした時には、先ず成分を脚注 10 に従い完全反対称にしておいてから求める必要がある。

とする。以下ではテンソルの添え字について、 $\mu, \nu, \dots$ などのギリシャ文字は $0 \sim n$ を動き、 $i, j, \dots$ などのアルファベットは $1 \sim n$ を動くものとする。

先ず、次のような添え字 $\mu_1 \sim \mu_p$ の中に 0 がいない成分が全て 0 であるような p-form 即ち

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{\dot{\omega}_{\mu_1 \dots \mu_p}}{p!} dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_p} \\ &= \sum_{0 < i_1 < \dots < i_p} \dot{\omega}_{i_1 \dots i_{p-1} 0} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_{p-1}} \wedge dt \end{aligned} \quad (80)$$

を考える。これを $\dot{\omega}_{i_1 \dots i_{p-1} 0} =: \omega_{i_1 \dots i_{p-1}}$ と置き、

$$\tilde{\omega}_0 := \sum_{i_1 < \dots < i_{p-1}} \omega_{i_1 \dots i_{p-1}} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_{p-1}}$$

と置けば、 $\tilde{\omega}_0$ は n 次元（座標系が $\mathbf{q}$ である）の p-1-form のようにみなせ、

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 \wedge dt \quad (81)$$

と書ける。このように書くようにすれば一般の p-form

$$\tilde{\omega} = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_p} \dot{\omega}_{\mu_1 \dots \mu_p} dz^{\mu_1} \dots dz^{\mu_p} \quad (82)$$

に対しても、

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \sum_{(0 <) i_1 < \dots < i_p} \dot{\omega}_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \\ &\quad + \sum_{i_1 < \dots < i_{p-1}} \dot{\omega}_{i_1 \dots i_{p-1} 0} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_{p-1}} \wedge dt \end{aligned} \quad (83)$$

と書き、成分を

$$\begin{aligned} \cdot \theta_{i_1 \dots i_p} &:= \dot{\omega}_{i_1 \dots i_p} \quad (i_1, \dots, i_p \neq 0) \\ \cdot \omega_{i_1 \dots i_{p-1}} &:= \dot{\omega}_{i_1 \dots i_{p-1} 0} \end{aligned}$$

と書き直して、p-form $\tilde{\theta}$ 、p-1-form $\tilde{\omega}_0$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &:= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \theta_{i_1 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \\ \tilde{\omega}_0 &:= \sum_{i_1 < \dots < i_{p-1}} \omega_{i_1 \dots i_{p-1}} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_{p-1}} \end{aligned}$$

と置けば、

$$\tilde{\omega} = \tilde{\theta} + \tilde{\omega}_0 \wedge dt \quad (84)$$

と書ける。

p-vector についても全く同様にできて、p-vector $\bar{\mathbf{v}}$ 、p-1-vector $\bar{\mathbf{u}}$ を用いて

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{v}} + \frac{\partial}{\partial t} \wedge \bar{\mathbf{u}} \quad (85)$$

のように出来る。ここで成分は

$$\begin{aligned} \cdot v^{i_1 \dots i_p} &:= F^{i_1 \dots i_p} \quad (i_1, \dots, i_p \neq 0) \\ \cdot u^{i_1 \dots i_{p-1}} &:= F^{0 i_1 \dots i_{p-1}} \end{aligned}$$

と対応させている。

上の対応 (84)(85) は、上の議論から一意的であるということが分かる。

これらのことから分かるように、n+1 次元の空間 M は、n 次元空間にもう 1 つパラメータ t を付けたものとして扱えるのが分かる。(84) の $\tilde{\theta}$ や、(85) の $\bar{\mathbf{v}}$ を n 次元のテンソル (p-form または p-vector) と呼ぶことにする¹⁷。n+1 次元での外微分や dual テンソルが n 次元で表現するとどうなるか、その読み替えが即座に出来れば便利である。

まず、外微分について。当然、 M を n+1 次元空間で見るか、n 次元空間とパラメータ t との組で見るかで結果が変わる。つまり t についての外微分が入るか入らないの違いがある。そこで n+1 次元で見た時の外微分を D で、n 次元で見た時の外微分を d で表すことにする。p-form

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\theta} + \tilde{\omega} \wedge dt \quad (86)$$

に対し、この外微分 $D\tilde{\Omega}$ は

$$\begin{aligned} D\tilde{\Omega} &= D\tilde{\theta} + D(\tilde{\omega} \wedge dt) \\ &= d\tilde{\theta} + dt \wedge \partial_t \tilde{\theta} + d\tilde{\omega} \wedge dt \end{aligned} \quad (87)$$

となる ($\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ は t での偏微分)。ここで形式的には D は

$$D = d + dt \wedge \partial_t \quad (88)$$

¹⁷さらに一般に n 次元空間のテンソルは、n より小さい m に対して、m 次元のテンソルを含んでいるとみなせる。

と書ける。

dual テンソルもまた、n+1 次元か n 次元かで変わるので、n+1 次元で見た時の dual を † で、n 次元で見た時の dual を今まで通りの $*$ で表すことにする。ただし M の計量の行列式は $g > 0$ であるとする。

まず、n 次元の p-form $\tilde{\theta}$ 、即ち添え字の中に 0 がある成分は全て 0 になるような p-form の dual $^\dagger \tilde{\theta}$ をとってみる。

$$^\dagger \tilde{\theta} = \sum_{\substack{\mu_0=0 < \dots < \mu_{n-p} \\ 0 < \mu_{n-p+1} < \dots < \mu_n}} \sigma^{\mu_0 \dots \mu_n} \theta_{\mu_{n-p+1} \dots \mu_n} \frac{\partial}{\partial z^{\mu_0}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{\mu_{n-p}}}.$$

ここで

$$\begin{aligned} \sigma^{0\mu_1 \dots \mu_n} &= \frac{1}{\sigma} \varepsilon^{0\mu_1 \dots \mu_n} \\ &= \frac{1}{\sigma} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \\ &=: \sigma^{i_1 \dots i_n} \end{aligned} \quad (89)$$

と置くことで n 次元での体積要素を定義し、n 次元での dual をこの体積要素でとるものとすれば、

$$\begin{aligned} ^\dagger \tilde{\theta} &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{n-p} \\ i_{n-p+1} < \dots < i_n}} \sigma^{i_1 \dots i_n} \theta_{i_{n-p+1} \dots i_n} \frac{\partial}{\partial t} \wedge \frac{\partial}{\partial z^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{i_{n-p}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \wedge {}^* \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (90)$$

と書ける。

n 次元の p-vector $\bar{\mathbf{v}}$ に対しても、(89) より

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu_1 \dots \mu_n 0} &= \sigma \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n 0} \\ &= (-1)^n \sigma \varepsilon_{0\mu_1 \dots \mu_n} \\ &= (-1)^n \sigma \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \\ &= (-1)^n \sigma_{i_1 \dots i_n} \end{aligned} \quad (91)$$

と対応できるので、dual テンソル $^\dagger \bar{\mathbf{v}}$ は

$$\begin{aligned} ^\dagger \bar{\mathbf{v}} &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ i_{p+1} < \dots < i_n}} \sigma_{i_1 \dots i_n} v^{i_1 \dots i_p} dz^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dz^{i_n} \wedge dt \\ &= (-1)^n {}^* \bar{\mathbf{v}} \wedge dt \end{aligned} \quad (92)$$

と書ける。

(90)(92) で $\tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{v}}$ は任意なので $*\tilde{\theta}$ (n-p-vector) の代わりに $\tilde{\mathbf{u}}$ (n-p-vector) を、 $*\tilde{\mathbf{v}}$ (n-p-form) の代わりに $\tilde{\omega}$ (n-p-form) と置けば、($\dagger$ をとって)

$$\cdot \dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} \wedge \tilde{\mathbf{u}} \right) = *\tilde{\mathbf{u}} \quad (93)$$

$$\cdot \dagger \left(\tilde{\omega} \wedge dt \right) = (-1)^n *\tilde{\omega} \quad (94)$$

が得られる。これらを使って、任意の n+1 次元の p-form や p-vector の dual テンソルが分かる。即ち (86) の p-form $\tilde{\Omega}$ に対し

$$\begin{aligned} \cdot \dagger \tilde{\Omega} &= \dagger \tilde{\theta} + \dagger \left(\tilde{\omega} \wedge dt \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \wedge *\tilde{\theta} + (-1)^n *\tilde{\omega}. \end{aligned} \quad (95)$$

同様に (85) の p-vector $\tilde{\mathbf{F}}$ に対し

$$\begin{aligned} \cdot \dagger \tilde{\mathbf{F}} &= \dagger \tilde{\mathbf{v}} + \dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} \wedge \tilde{\mathbf{u}} \right) \\ &= (-1)^n *\tilde{\mathbf{v}} \wedge dt + *\tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (96)$$

となる¹⁸。

7 応用例 1

まず、n 次元空間 (座標系を $\mathbf{q}$ と取っておく) を考えて、ベクトル場 $\tilde{\mathbf{u}}$ が与えられているとする。 $\tilde{\mathbf{u}}$ の生成する flow を ϕ_t とする。空間の任意の領域 D_0 は flow によって領域 $\phi_t(D_0) =: D_t$ に移る。

今、ある量 ρ (例えば電荷密度) に対し、領域 D_t 内の総量 (全電荷) は (Q_t と書く)

$$\begin{aligned} \int_{D_t} \rho \tilde{\sigma} &= \int_{D_t} \rho_t \sigma_t dq_t^1 \wedge \cdots \wedge dq_t^n \\ &= \int_{D_0} \rho_t \sigma_t J_t dq_0^1 \wedge \cdots \wedge dq_0^n \\ &=: Q_t \end{aligned} \quad (97)$$

¹⁸ M の座標系を、 t を第 0 成分とする代わりに、第 r 成分を t とすると、(90)(92) は

$$\begin{aligned} \cdot \dagger \tilde{\omega} &= (-1)^r \frac{\partial}{\partial t} \wedge *\tilde{\omega} \\ \cdot \dagger \tilde{\mathbf{v}} &= (-1)^{n-r} *\tilde{\mathbf{v}} \wedge dt \end{aligned}$$

と変更される。

$$J_t := \frac{\partial(q_t^1, \dots, q_t^n)}{\partial(q_0^1, \dots, q_0^n)}. \quad (98)$$

よって Q_t の時間変化率 (フロー微分) は

$$\frac{d}{dt} Q_t = \int_{D_0} \frac{d}{dt} (\rho_t \sigma_t J_t) dq_0^1 \wedge \cdots \wedge dq_0^n$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_t^i}{\partial q_0^j} \right) &= \frac{\partial^2 q_t^i}{\partial q_0^j \partial q_0^k} \dot{q}_0^k + \frac{\partial^2 q_t^i}{\partial t \partial q_0^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_0^j} \left(\frac{\partial q_t^i}{\partial q_0^k} \dot{q}_0^k + \frac{\partial q_t^i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_0^j} \left(\frac{dq_t^i}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{q}_t^i}{\partial q_0^j} \end{aligned} \quad (99)$$

及び

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_t &= \frac{d}{dt} \left(\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \frac{\partial q_t^{i_1}}{\partial q_0^1} \cdots \frac{\partial q_t^{i_n}}{\partial q_0^n} \right) \\ &= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_t^{i_j}}{\partial q_0^j} \right) \left(\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \frac{\partial q_t^{i_1}}{\partial q_0^1} \cdots \overset{j}{\cancel{\frac{\partial q_t^{i_j}}{\partial q_0^j}}} \cdots \frac{\partial q_t^{i_n}}{\partial q_0^n} \right) \\ &= \sum_j \frac{\partial u^{i_j}}{\partial q_t^{i_j}} \left(\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \frac{\partial q_t^{i_1}}{\partial q_0^1} \cdots \frac{\partial q_t^{i_n}}{\partial q_0^n} \right) \\ &= \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot J_t \end{aligned} \quad (100)$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho_t \sigma_t J_t) dq_0^1 \wedge \cdots \wedge dq_0^n &= \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \sigma) + \frac{\partial}{\partial q^i} (\rho u^i \sigma) \right] J dq_0^1 \wedge \cdots \wedge dq_0^n \\ &= \frac{\partial}{\partial t} *\rho + d* (\rho \tilde{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (101)$$

と書ける。これを連続方程式という。

ここで時間成分まで含めた n+1 次元で考えてみる。n+1 次元のベクトル場を

$$\tilde{\mathbf{U}} := \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (102)$$

とすると (101) は、 $D^\dagger(\rho\bar{\mathbf{U}})$ で表される。実際

$$\begin{aligned} D^\dagger(\rho\bar{\mathbf{U}}) &= D^\dagger(\rho\bar{\mathbf{u}} + \rho\partial_t) \\ &= D((-1)^n {}^*\rho\bar{\mathbf{u}} \wedge dt + {}^*\rho) \\ &= (-1)^n d({}^*\rho\bar{\mathbf{u}}) \wedge dt + dt \wedge \partial_t {}^*\rho \\ &= dt \wedge (d {}^*\rho\bar{\mathbf{u}} + \partial_t {}^*\rho) \end{aligned} \quad (103)$$

となる。

ここで仮に量 ρ が保存量であるとする。即ち任意の領域 D_0 に対して

$$\frac{d}{dt} Q_t = 0 \quad (104)$$

とすると、

$$D^\dagger(\rho\bar{\mathbf{U}}) = 0. \quad (105)$$

よって、ある $n-1$ -form $\tilde{\mathbf{F}}$ があり

$$D\tilde{\mathbf{F}} = {}^\dagger(\rho\bar{\mathbf{U}}) \quad (106)$$

となる。ここで $\tilde{\mathbf{F}}$ をさらに、 n 次元の 1-vector $\bar{\mathbf{E}}$ 及び、 n 次元の $n-2$ -form $\tilde{\mathbf{H}}$ を用いて、

$$\tilde{\mathbf{F}} = {}^*\bar{\mathbf{E}} + (-1)^n \tilde{\mathbf{H}} \wedge dt \quad (107)$$

と書くと、

$$\begin{aligned} D\tilde{\mathbf{F}} &= d({}^*\bar{\mathbf{E}} + (-1)^n [-\partial_t {}^*\bar{\mathbf{E}} + d\tilde{\mathbf{H}}] \wedge dt \\ &= {}^*\rho + (-1)^n {}^*\rho\bar{\mathbf{v}} \wedge dt \end{aligned} \quad (108)$$

即ち、Maxwell 方程式 (の半分)

$$\cdot d {}^*\bar{\mathbf{E}} = {}^*\rho \quad (109)$$

$$\cdot -\frac{\partial}{\partial t} {}^*\bar{\mathbf{E}} + d\tilde{\mathbf{H}} = {}^*\rho\bar{\mathbf{u}} \quad (110)$$

が導かれる。 $\tilde{\mathbf{F}}$ ($\tilde{\mathbf{F}}$ の $\dagger$ をとって、さらに form に移したもの) の外微分 $D\tilde{\mathbf{F}}$ が 0 とすれば Maxwell 方程式の残りの組になる。

8 応用例 2

8.1 通例の極座標表示

直交座標系以外の座標系でよく使う座標系として極座標の説明。極座標は、直交座標系

$(x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$ に対して、 $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $0 \leq r, 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi$ ($i = 2, 3, \dots, n$) と書き、関係は

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \sin \theta_n \\ x^2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \sin \theta_n \\ x^3 = r \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_n \\ \vdots \\ x^n = r \cos \theta_{n-1} \sin \theta_n \\ x^{n+1} = r \cos \theta_n \end{cases} \quad (111)$$

である。以下計算上の理由から n 変数の時の直交座標系を $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ で表す。即ち

$$\begin{cases} y^1 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \\ y^2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \\ \vdots \\ y^n = r \cos \theta_{n-1} \end{cases} \quad (112)$$

よって x^i と y^i の関係は

$$\begin{cases} x^i = y^i \sin \theta_n & (i = 1, 2, \dots, n) \\ x^{n+1} = r \cos \theta_n \end{cases} \quad (113)$$

となる。今 $(x^1, \dots, x^{n+1})$ から $(r, \theta_1, \dots, \theta_n)$ への変換行列を C_{n+1} で表すと、

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} & & & & y^1 \cos \theta_n \\ & & & & y^2 \cos \theta_n \\ & & & & y^3 \cos \theta_n \\ & & & & \vdots \\ & & & & y^n \cos \theta_n \\ \sin \theta_n C_n & & & & \\ (n \times n) & & & & \\ \cos \theta_n & 0 & \cdots & 0 & -r \sin \theta_n \end{pmatrix}$$

ここで C_n は $(y^1, \dots, y^n)$ から $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ への変換行列である。これより $\det C_{n+1}$ と $\det C_n$ の関係を導くことが出来る。 $\sin \theta_n C_n$ の第 1 列目は

$$\frac{\sin \theta_n}{r} y^i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (114)$$

であるので

$$\begin{aligned}
\det C_{n+1} &= -r \sin \theta_n \det(\sin \theta_n C_n) \\
&\quad - \left\{ \cos \theta_n \frac{r \cos \theta_n}{\sin \theta_n} \det(\sin \theta_n C_n) \right\} \\
&= -\frac{r}{\sin \theta_n} \det(\sin \theta_n C_n) \\
&= -r \sin^{n-1} \theta_n \det C_n \quad (115)
\end{aligned}$$

となる。ここで $\det C_2 = -r$ が容易に計算出来るので、後は帰納的に

$$\begin{aligned}
\det C_2 &= -r \\
\det C_3 &= r^2 \sin \theta_2 \\
\det C_4 &= -r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2 \\
\det C_5 &= r^4 \sin^3 \theta_4 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2 \\
&\vdots \\
\det C_n &= (-1)^{n-1} r^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \sin^{i-1} \theta_i \quad (116)
\end{aligned}$$

これは前節で求めたように、 n 次元体積の積分変数を変えた時の比を与える。即ち

$$dx^1 \cdots dx^n = r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \sin^i \theta_{i+1} \cdot dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$$

となる。

以上により $n-1$ 次元球面 (S^{n-1} と書く) の表面積を求めることが出来る。

$$\prod_{i=1}^{n-2} \sin^i \theta_{i+1} \cdot d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} = d\Omega_n \quad (118)$$

と置くと

$$\begin{aligned}
\int d\Omega_n &= \int \sin^{n-2} \theta_{n-1} \sin^{n-3} \theta_{n-2} \cdots \\
&\quad \cdots \sin \theta_2 d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \\
&= 2\pi I_1 I_2 \cdots I_{n-2} \quad (119)
\end{aligned}$$

ここで積分は θ_1 は 0 から 2π までで、他は 0 から π

までにわたる。また

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi \sin^n \theta d\theta \\
&= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} \pi & (n : \text{even}) \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3} & (n : \text{odd}) \end{cases} \quad (120)
\end{aligned}$$

($I_1 = 2$) である。よって

$$\int d\Omega_n = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (121)$$

となる。これが半径 1 の $n-1$ 次元球面 S^{n-1} の表面積である。従って半径 r の $n-1$ 次元球面の表面積は $2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$ となる。よって半径 r の n 次元球体の n 次元体積は

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} r^n \quad (122)$$

となる。

計量は (60) より

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & r^2 \prod_{i=2}^n \sin^2 \theta_i & & & \\ & & r^2 \prod_{i=3}^n \sin^2 \theta_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r^2 \sin^2 \theta_n \\ 0 & & & & & r^2 \end{pmatrix} \quad (117)$$

となる。従って上付き添え字の計量の逆行列 g^{ij} は各成分が逆数となったもの

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \frac{1}{r^2 \prod_{i=2}^n \sin^2 \theta_i} & & & \\ & & \frac{1}{r^2 \prod_{i=3}^n \sin^2 \theta_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_n} \\ 0 & & & & & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

で与えられる。

計量がわかったので線素 ds^2 は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \prod_{i=2}^n \sin^2 \theta_i d\theta_1^2 + \cdots + r^2 \sin^2 \theta_n d\theta_{n-1}^2 + r^2 d\theta_n^2 \quad (123)$$

となる。従ってベクトル場 $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 即ち
 はすべて線素 ds^2 による内積に関して互いに直交する。これらは $\Gamma(TM)$ の基底を張るので規格化して
 正規直交基底 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta_1}, \dots, \mathbf{e}_{\theta_n}$ が得られる。即ち

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \\ \mathbf{e}_{\theta_1} &= \frac{1}{r \prod_{i=2}^n \sin \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ \mathbf{e}_{\theta_2} &= \frac{1}{r \prod_{i=3}^n \sin \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_{\theta_{n-1}} &= \frac{1}{r \sin \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} \\ \mathbf{e}_{\theta_n} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_n}\end{aligned}\quad (124)$$

となる。ものの本では極座標表示の際のベクトル場の成分はこの正規直交基底での成分を表すことが多い。

関数 f の勾配は

$$\begin{aligned}\bar{d}f &= g^{ij} \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \prod_{i=2}^n \sin^2 \theta_i} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_n} \frac{\partial f}{\partial \theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} \\ &\quad \quad \quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_n} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \prod_{i=2}^n \sin \theta_i} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \mathbf{e}_{\theta_1} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{r \sin \theta_n} \frac{\partial f}{\partial \theta_{n-1}} \mathbf{e}_{\theta_{n-1}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \mathbf{e}_{\theta_n}\end{aligned}\quad (125)$$

と表される。ラプラシアン表記も良く用いられる。
 ラプラシアンは $*d*\bar{d}f$ を計算することで与えられる。

$$\begin{aligned}*d*\bar{d}f &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial q^j} \right) \\ &= \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \prod_{i=2}^n \sin^2 \theta_i} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \prod_{i=3}^n \sin^2 \theta_i \cdot \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_n \cdot \sin^{n-2} \theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} \left(\sin^{n-2} \theta_{n-1} \frac{\partial f}{\partial \theta_{n-1}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^{n-1} \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_n} \left(\sin^{n-1} \theta_n \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \right)\end{aligned}\quad (126)$$

として得られる。

一般的な $n+1$ 次元で 3 次元ベクトル解析での発散 $\text{div} \mathbf{A}$ に対応するものは $*d*\bar{\mathbf{A}}$ である。ベクトル場 $\bar{\mathbf{A}}$ の成分はものの本では基底を $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots$ に取った時の成分ではなく、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta_1}, \dots$ を基底にとって表した時の成分を $A^1, A^2, \dots$ のように表すことが多い。以下では A^i はそのように取ったものを表すものとする。また $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots$ を基底にとった時の成分を B^i と書く。即ち $A^1 \mathbf{e}_r + A^2 \mathbf{e}_{\theta_1} + \dots = B^1 \frac{\partial}{\partial r} + B^2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots$ である。計算すると

$$\begin{aligned}*d*\bar{\mathbf{A}} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} B^i) \\ &= \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} (r^n A^1) + \frac{1}{r \prod_{i=2}^n \sin \theta_i} \frac{\partial A^2}{\partial \theta_1} \\ &\quad \frac{1}{r \prod_{i=3}^n \sin \theta_i \cdot \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\sin \theta_2 A^3) \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{1}{r \sin \theta_n \cdot \sin^{n-2} \theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} (\sin^{n-2} \theta_{n-1} A^n) \\ &= \frac{1}{r \cdot \sin^{n-1} \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_n} (\sin^{n-1} \theta_n A^{n+1})\end{aligned}\quad (127)$$

と表されるのが分かる。

最後に $n = 2$ の場合、即ち 3 次元の場合に極座標表示での回転 $\text{rot} \mathbf{A}$ を計算する。 $\text{rot} \mathbf{A}$ に対応するものは ${}^*d\tilde{\mathbf{A}}$ であり、3 次元の場合においてのみ 1-vector となる。再び $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots$ を基底に取った時の成分を B^i で表して、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta_1}, \dots$ を基底に取った時の成分を A^i で表すと、

$$\begin{aligned}
{}^*d\tilde{\mathbf{A}} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\varepsilon^{ijk}}{2!} \frac{\partial B_j}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial q^i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial B_2}{\partial \theta_2} - \frac{\partial B_3}{\partial \theta_1} \right) \frac{\partial}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial B_3}{\partial r} - \frac{\partial B_1}{\partial \theta_2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial B_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial B_2}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\
&= \frac{1}{r \sin \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} (\sin \theta_2 A^2) - \frac{\partial A^3}{\partial \theta_1} \right) \frac{\partial}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A^3) - \frac{\partial A^1}{\partial \theta_2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial A^1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial}{\partial r} (r A^2) \right) \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\
&= \frac{1}{r \sin \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} (\sin \theta_2 A^2) - \frac{\partial A^3}{\partial \theta_1} \right) \mathbf{e}_r \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A^3) - \frac{\partial A^1}{\partial \theta_2} \right) \mathbf{e}_{\theta_1} \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial A^1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial}{\partial r} (r A^2) \right) \mathbf{e}_{\theta_2}
\end{aligned} \tag{128}$$

で表される。

8.2 もう一つの極座標の取り方

座標系の取り方が 2 次元の時にとる通常の極座標系と違ってしまふので、通常の 2 次元での極座標系の拡張となっているような n 次元の極座標の取り方もできる。即ち $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$ ($i =$

$1, 2, \dots, n$) として

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-1} \cos \theta_n \\ x^2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-1} \cos \theta_n \\ x^3 = r \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cdots \cos \theta_n \\ \vdots \\ x^n = r \sin \theta_{n-1} \cos \theta_n \\ x^{n+1} = r \sin \theta_n \end{cases} \tag{129}$$

である。慣習的に物理では前節の極座標表示を取ることが多いが、数学ではこちらの表示を取ることが多いように思われる。この時には変換行列 C_{n+1} と C_n との関係は

$$\det C_{n+1} = r \cos^{n-1} \theta_n \det C_n \tag{130}$$

であり、負符号がつかない。また $\det C_2 = r$ であるので、 $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ と $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ の向きが同じであることが分かる。

体積要素は

$$dx^1 \cdots dx^n = r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \cos^i \theta_{i+1} \cdot dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \tag{131}$$

となる。この場合にも S^{n-1} の体積要素を

$$\prod_{i=1}^{n-2} \cos^i \theta_{i+1} \cdot d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} = d\Omega_n \tag{132}$$

と置けば、先ほどと同様に

$$\int d\Omega_n = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{133}$$

であることが確かめられる。また計量は

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & r^2 \prod_{i=2}^n \cos^2 \theta_i & & & \\ & & r^2 \prod_{i=3}^n \cos^2 \theta_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r^2 \cos^2 \theta_n \\ 0 & & & & & r^2 \end{pmatrix}$$

となる。