

クリフォード代数

TKG

2025 年 4 月 24 日

目次

1 INTRODUCTION

2 クリフォード代数

3 スピン群

4 複素化

5 表現

6 スピン多様体

6.1 いくつかの定義

6.2 スピン接続

7 ディラック作用素

A notation

A.1 パウリ行列

A.2 一般線形代数

A.3 ベクトル束

1 INTRODUCTION

場の量子論の学習をするうちに遭遇するスピノールなんかに関するトピックになります。基本的なクリフォード代数やスピン群およびその表現論に関するトピックです。空間の回転群とスピン群との関係やローレンツ群とスピン群との関係など、物理学で現れるスピンの概念が幾何学の中でどのように自然に導入されうるのかを垣間見ることができます。

2 クリフォード代数

1 内積を持った n 次元実ベクトル空間を V とする。基底を $(e^1, e^2, \dots, e^n)$ とする時、この基底での計量が

1

2

4

4

$$g = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。

7

この時、ベクトル空間 $Cl(V)$ を、積が定義されていて、基底が

7

8

$$e^{i_1} e^{i_2} \dots e^{i_k} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, k = 1, \dots, n)$$

9

及び 1 で与えられ、関係式

$$e^i e^j + e^j e^i = -2g^{ij}$$

10

10

11

11

で与えられ、係数が実数であるものとする。 $\dim Cl(V) = 2^n$ である。 $Cl(V)$ をクリフォード代数という。慣例として反交換関係を $v, u \in Cl(V)$ に対し

$$\{v, u\} := vu + uv$$

で定義する。

$Cl(V)$ の部分代数 $Cl_0(V), Cl(V)_1$ をそれぞれ、 V の基底の偶数個の積からなる $Cl(V)$ の基底の線形結合したもの全体の集合、奇数個の積からなる基底の線形結合の集合とする。従って分解 $Cl(V) = Cl_0(V) \oplus Cl_1(V)$ が成立するこれらの次元はともに

$\dim Cl_0(V) = \dim Cl_1(V) = 2^{n-1}$ である¹。

例 1) $Cl(\mathbb{R})$ の場合。基底 e^1 の内積、 $(e^1, e^1) = \pm 1$ に対して、 $Cl(\mathbb{R}) = \mathbb{C}, \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ である。ただし、2 個目の $1, \sigma_1$ ($\sigma_1^2 = 1$) により張られるベクトル空間であり、基底を $\frac{1 \pm \sigma_1}{2}$ と選ぶことにより、直交分解になる。

例 2) $Cl(\mathbb{R}^2)$ の場合。まず、計量は $g^{ij} = \delta^{ij}$ とする。この時 $Cl(\mathbb{R}^2) = \mathbb{H}$ となる²。計量が $g^{ij} = -\delta^{ij}$ の時は、

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e^1 e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により張られるベクトル空間なので、 $Cl(\mathbb{R}^2) = M(2)$ となる³。計量が逆符号の場合は、上の場合の、 e^2 と $e^1 e^2$ の行列への対応を入れ替えたものになるので、この場合も $Cl(\mathbb{R}^2) = M(2)$ である。

例 3) $Cl(\mathbb{R}^3)$ の場合。計量は $g^{ij} = \delta^{ij}$ とすると、 $Cl(\mathbb{R}^3) = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ である。この対応は後述する $Cl(\mathbb{R}^3) = Cl(\mathbb{R}) \otimes Cl(\mathbb{R}^2)$ の対応により得られる。同様にして計量が $g^{ij} = -\delta^{ij}$ の場合は $Cl(\mathbb{R}^3) = M(2, \mathbb{C})$ で与えられる。詳細な議論は 5 の章を参照されたい。他の計量の場合も同様（詳しくは読者に任せる）。

¹ $\dim Cl_0(V) = {}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \dots$ 及び $\dim Cl_1(V) = {}_n C_1 + {}_n C_3 + {}_n C_5 + \dots$ であるが、 $\sigma_1^2 = 1$ として、 $(1 + \sigma_1)^n = \dim Cl_0(V) + \dim Cl_1(V) \sigma_1$ 及び $(1 + \sigma_1)^n = 2^{n-1}(1 + \sigma_1)$ であることより $\dim Cl_0(V) = \dim Cl_1(V) = 2^{n-1}$ が分かる。

² $\mathbb{H}$ は四元数であり、 $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(\frac{1}{i}\sigma_1, \frac{1}{i}\sigma_2, \frac{1}{i}\sigma_3)$ である。ここで $\mathbb{R}(\frac{1}{i}\sigma_1, \frac{1}{i}\sigma_2, \frac{1}{i}\sigma_3)$ は $\frac{1}{i}\sigma_1, \frac{1}{i}\sigma_2, \frac{1}{i}\sigma_3$ から生成される $\mathbb{R}$ 上の代数を表す。

³ $M(n)$ や $M(n, \mathbb{C})$ の定義はノートの最終章の A.2 節で与えている。

3 スピン群

スピンの定義。 a_{ij} が実数とし、

$$\alpha = \exp \left(\sum_{i < j} \frac{1}{2} a_{ij} e^i e^j \right)$$

の形の元全体は群をなす。これを $\text{Spin}(V)$ と書き、スピンの群という。

前節の計量 g が与えられた n 次元実ベクトル空間 V に対して、内積を不変に保つ群を $O(V)$ とする。 $O(V)$ の元はその行列式が ± 1 である。その中で行列式が $+1$ のもの全体からなる部分群を $SO(V)$ とする⁴。 $SO(V)$ の元を e^S と書く

$$e^{S^t} g e^S = g$$

よって

$$gS + S^t g = 0$$

今は $g^t = g$ なので結局

$$(gS) + (gS)^t = 0$$

となる。即ち gS は $SO(n)$ の生成子 ($\mathfrak{so}(n)$ の元) となる。また

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}$$

とベクトルで表し、行列 M が $M^t = -M$ とすると (即ち $M \in \mathfrak{so}(n)$)

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}, -\frac{1}{4} \mathbf{e} M \mathbf{e}] &= \frac{1}{2} (gM - gM^t) \mathbf{e} \\ &= gM \mathbf{e} \end{aligned}$$

これより $SO(V)$ の生成子 S ($gS = M$) に対し

$$[\mathbf{e}, -\frac{1}{4} \mathbf{e} M \mathbf{e}] = S \mathbf{e}$$

⁴ 計量の対角成分が全て 1 である場合は $SO(V)$ は $SO(n)$ になる。その場合にはスピンの群を $\text{Spin}(n)$ と書く。

従って $\text{Spin}(V)$ の元 $\exp(-\frac{1}{4}\mathbf{e}M\mathbf{e})$ の V への adjoint 表現は $\text{SO}(V)$ になる。即ち

$$ad : \text{Spin}(V) \rightarrow \text{SO}(V)$$

具体的には、 $\alpha = e^{-\frac{1}{4}\mathbf{e}M\mathbf{e}}$ に対し

$$\alpha^{-1}v\alpha = ad(\alpha)v = e^S v$$

もう少し一般的にまとめて書けば、 i 行 j 列が 1 で、 j 行 i 列が -1 で他が 0 の行列（これは $\mathfrak{so}(n)$ の基底をなす）を M^{ij} と書き、 $-\frac{1}{4}\mathbf{e}M^{ij}\mathbf{e} = -\frac{1}{4}[e^i, e^j] =: S^{ij}$ と置けば $\text{Spin}(V)$ の元は一般的に

$$e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}} \quad (\omega_{ij} = -\omega_{ji})$$

の形で書けるもの全体。この adjoint 表現、 $\alpha \in \text{Spin}(V)$, $v \in V$

$$\alpha^{-1}v\alpha = ad(\alpha)v$$

により $\text{Spin}(V) \rightarrow \text{SO}(V)$ が与えられる。 $S^{ij} = gM^{ij}$ と置けば (S^{ij} は $\text{SO}(V)$ の生成子の集合 $\mathfrak{so}(V)$ の基底をなす) この対応は、 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ として

$$ad : e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}} \rightarrow e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}}$$

ここで S^{ij} は具体的に書けば、

$$S^{ij} = \begin{pmatrix} & i & & j & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & & \cdots & g^{ii} & \cdots i \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -g^{jj} & \cdots & & \cdots j \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

であり、 $S^{ij} = -S^{ji}$ である。 $\text{Spin}(V)$ の生成子全体の集合を $\mathfrak{spin}(V)$ と書く。

以上により $\text{Spin}(V)$ 群から $\text{SO}(V)$ への準同型が得られた。次に、この準同型の核を求める。この計量による内積で

$$\begin{aligned} |(v, v)| &= |(\omega, \omega)| = 1 \\ (v, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす V の元 v, ω について

$$e^{tv\omega}$$

を計算する。まず $v = v_i e^i$, $\omega = \omega_i e^i$ の時 (i についての和をとるものとする)、

$$\begin{aligned} \{v, \omega\} &= v_i \omega_j \{e^i, e^j\} \\ &= -2(v, \omega) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} v\omega &= \frac{1}{2}v\omega + \frac{1}{2}v\omega \\ &= \frac{1}{2}(v\omega - \omega v) \\ &= \frac{1}{2}[v, \omega] \\ &= \frac{1}{2}v_i \omega_j [e^i, e^j] \\ &= -\frac{1}{2}v_i \omega_j \mathbf{e}M^{ij}\mathbf{e} \\ &= 2v_i \omega_j S^{ij} \end{aligned}$$

これより $\text{Spin}(V)$ の元は一般的に $e^{tv\omega}$ の形で書けることが分かる。次に $(v\omega)^2$ について

$$\begin{aligned} (v\omega)^2 &= v\omega v\omega \\ &= -v^2 \omega^2 \\ &= -(v, v)(\omega, \omega) \end{aligned}$$

ここで v または ω のノルムが $+1$ か -1 かで場合分けされる。ともに 1 か -1 の場合は $(v\omega)^2 = -1$ 。よって

$$e^{tv\omega} = \cos t + v\omega \sin t$$

一方が -1 、もう一方が 1 の場合には $(v\omega)^2 = 1$ 。よって

$$e^{tv\omega} = \cosh t + v\omega \sinh t$$

となる。前者の場合にはスカラーは ± 1 。後者の場合は 1 のみ。どちらも明らかに ad の核である。またそれらに限ることが分かる。

$n = 2$ の場合、

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \text{ or } g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

の場合は前者に当てはまり、よって核は $\{\pm 1\}$ 。よってこの場合には $\text{Spin}(V)$ は $\text{SO}(V)$ の 2 重被覆になっている。

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \text{ or } g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

の場合は後者の場合に当てはまり、よって核は 1 のみ。即ち $\text{Spin}(V) \simeq \text{SO}(V)$ である。

$n \geq 3$ の場合、核は $\{\pm 1\}$ 。よって $\text{Spin}(V)$ は $\text{SO}(V)$ の 2 重被覆になっている。

4 複素化

$Cl(V)$ の基底で張られるベクトル空間で、基底の関係式も同じだが、係数が複素数であるものを $\mathbb{C}l(V) = Cl(V) \otimes \mathbb{C}$ と書く。明らかにいくつかの基底に i をかけて基底を取り直すことにより、計量は対角成分を全て 1 であるように出来る。よって V の計量によらず、次元にだけ依存するので、 $\mathbb{C}l(n)$ と書くことにする。また $\text{spin}(V)$ の元を $\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}$ とし、 θ を実数として $\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij} + i\theta$ を生成子とするリー群、つまり $e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij} + i\theta}$ 全体からなる集合（群をなす）を $\text{Spin}^c(V)$ と書き、その生成子全体からなる集合を $\text{spin}^c(V)$ と書く。

例 1) $\mathbb{C}l(1)$ は $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ を複素化すれば $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ であることが分かる。

例 2) $\mathbb{C}l(2)$ は $M(2)$ を複素化すれば $M(2, \mathbb{C})$ であることが分かる。

5 表現

クリフォード代数の表現について。前に与えた計量 g^{ij} による内積を持つ n 次元実ベクトル空間を V_n と書

くことにする。この時 $Cl(V_{n+2}) = Cl(V_n) \otimes Cl(V_2)$ と書けることが分かる。対応は、 V_n の基底を e^i ($i = 1, \dots, n$)、 V_n の計量を、 V_{n+2} の 1 行 1 列から n 行 n 列までと同じか反対符号（どちらであるかは後述する）、 V_2 の基底を θ^i ($i = 1, 2$) とし、 V_2 の計量は V_{n+2} の $n+1$ 行 $n+1$ 列から $n+2$ 行 $n+2$ 列までと同じであり、 η^{ij} ($i, j = 1, 2$) で書くとなると、 V_{n+2} の基底 ω^i ($i = 1, \dots, n+2$) は

$$\omega^i = \begin{cases} e^i \otimes \theta^1 \theta^2 & : 1 \leq i \leq n \\ 1 \otimes \theta^{i-n} & : i = n+1, n+2 \end{cases}$$

により対応する。関係式は $1 \leq i, j \leq n$ の時

$$\begin{aligned} \{\omega^i, \omega^j\} &= e^i e^j \otimes \theta^1 \theta^2 \theta^1 \theta^2 + e^j e^i \otimes \theta^1 \theta^2 \theta^1 \theta^2 \\ &= e^i e^j \otimes (-\eta^{11} \eta^{22}) + e^j e^i \otimes (-\eta^{11} \eta^{22}) \\ &= \pm \{e^i, e^j\} \\ &= -2g^{ij} \end{aligned}$$

ここで V_n の計量は最後の等式が成立するように符号を選んだものであるとする。即ち $\eta^{11} = \eta^{22}$ であれば V_{n+2} の計量と逆符号。 $\eta^{11} = -\eta^{22}$ であれば同符号。残りの関係式は

$$\begin{aligned} \{\omega^{n+1}, \omega^i\} &= e^i \otimes \theta^1 \theta^1 \theta^2 + e^i \otimes \theta^1 \theta^2 \theta^1 \\ &= e^i \otimes \theta^1 \theta^1 \theta^2 - e^i \otimes \theta^1 \theta^1 \theta^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

($n+2$ も同様) 及び、 $i, j = 1, 2$ として

$$\begin{aligned} \{\omega^{n+i}, \omega^{n+j}\} &= 1 \otimes \theta^i \theta^j + 1 \otimes \theta^j \theta^i \\ &= \{\theta^i, \theta^j\} \\ &= -2\eta^{ij} \end{aligned}$$

となり、実際に $Cl(V_{n+2})$ の基底の関係式を満たしていることが分かる。また、この対応が同型であることは、ベクトル空間としての次元がともに同じであることから分かる。

複素化したものは、 $\mathbb{C}l(n+2) = \mathbb{C}l(n) \otimes \mathbb{C}l(2)$ であることが分かる。

以上により、結局表現は 1 次元と 2 次元のクリフォード代数の表現が分かればよいことになる。そ

れらはすでに 2 節クリフォード代数の節で求めた。 $Cl(V)$ の表現を計算するには、計量を最初は +1 のみ並べて、残りを -1 が並ぶように、つまり

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

となるように基底を取りなおしたらよい。後は上記のように分解させていけばよい。その際次元を下げていく時に計量の符号を逆符号にさせるのか、同符号にさせるかを注意する必要がある。まず、最後から 2 つの -1 のペアを $M(2)$ に対応させる。次に最初の 2 つの +1 のペアを $M(2)$ に対応させる。また残りのものの最後から 2 つの -1 のペアを $M(2)$ に対応させる。このように交互に $M(2)$ に対応させていく。+1 と -1 のペアにまで来れば、それも $M(2)$ に対応する。また残りの +1 の 2 つのペアか -1 の 2 つのペアを $M(2)$ か $\mathbb{H}$ に適切な方に対応させていく。最後は V の次元 n が偶数か奇数かで 2 つのペアで終わるか、1 つ余るかである。前者であればやはり $M(2)$ か $\mathbb{H}$ か適切な方に対応させ、後者であれば $\mathbb{C}$ か $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ を対応させる。このようにして一般的に $Cl(V)$ の表現を求めることが出来る。もちろん帰納的に求めていくことも出来る。

$Cl(n)$ の場合はもっと単純で、 n が偶数か奇数かで $Cl(n) = M(2^{\frac{n}{2}}, \mathbb{C})$, or $M(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C}) \oplus M(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C})$

となる。

ここでスピノール群の表現を考える。まずクリフォード代数の表現は、 $n = 2m$ の時

$$Cl(2m) = M(2^m, \mathbb{C})$$

及び $n = 2m + 1$ の時

$$Cl(2m + 1) = M(2^m, \mathbb{C}) \oplus M(2^m, \mathbb{C})$$

であるので、 $n = 2m$ の時は既約表現は $\mathbb{C}^{2^m}$ であり、 $n = 2m + 1$ の時は 2 つの代数の直和となってい

て、それぞれの既約表現が $\mathbb{C}^{2^m}$ となっているのが分かる。スピノール群 $Spin(V)$ はクリフォード代数により生成されるので、これらはスピノール群の既約表現にもなっている。この表現をスピノール表現といい、 W_n で表す。

ここで物理での γ^5 に相当する

$$\omega = i^\varepsilon e^1 e^2 \cdots e^n$$

を考える。ここで ε は $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} g^{11} g^{22} \cdots g^{nn} = 1, -1$ に対して $\varepsilon = 0, 1$ である。これは単純に $\omega^2 = 1$ となるように係数を付けているだけである。まず、 $v \in V$ の時

$$v\omega = (-1)^{n-1} \omega v$$

となる。 $n = 2m + 1$ の時は従って、全ての $Cl(n)$ と交換するので、定数となる。正確には $Cl(2m + 1) = M(2^m, \mathbb{C}) \oplus M(2^m, \mathbb{C})$ の既約分解に対して、最初の $M(2^m, \mathbb{C})$ に対して定数で、後のそれに対しても定数となる。 $\omega^2 = 1$ より ω の表現は各既約表現に対して、 ± 1 である。明らかに 1 ではないので、 $\omega = (1, -1)$ である。次に $n = 2m$ の時を考える。この時は ω は定数ではないが、 $\omega^2 = 1$ より ω の固有値は ± 1 である。 ± 1 の固有値に属する W_n の部分空間をそれぞれ W_n^R, W_n^L とする。従って $W_n = W_n^L \oplus W_n^R$ である。また $v \in V$, $w^\pm \in W_n^\pm$ とすると (簡単のため L を - で、 R を + で書いて)、

$$\begin{aligned} \omega v w^\pm &= -v \omega w^\pm \\ &= \mp v w^\pm \end{aligned}$$

なので $v W_n^\pm = W_n^\mp$ である。

ここで $Cl(2m)$ を $Cl(2m - 1)$ の既約表現で表すことが出来る (これは物理での Weyl spinor の一般化である)。対応は、 $Cl(2m)$ の基底を e_i ($i = 0, 1, \dots, 2m - 1$) で、 $Cl(2m - 1)$ の基底を θ^i ($i = 1, \dots, 2m - 1$) で表し (既約表現であるとする)、 V_{2m} の計量を g で表せば、

$$e^0 = \begin{pmatrix} 0 & -g^{00} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e^i = \begin{pmatrix} 0 & -g^{00}\theta^i \\ -\theta^i & 0 \end{pmatrix},$$

で対応する。実際反交換関係を調べると

$$\begin{aligned}\{e^i, e^j\} &= g^{00}\{\theta^i, \theta^j\}, \\ \{e^i, e^0\} &= 0, \quad \{e^0, e^0\} = -2g^{00}\end{aligned}$$

従って V_{2m-1} の計量を $g^{00} = \pm 1$ に従って、 V_{2m} の計量（の対応する成分）と同じか反対かにすれば、対応が得られる。また次元は $\dim W_{2m-1} = 2^{m-1}$ なので、この表現の次元は 2^m となり、実際に W_{2m} の次元に一致するので、同型であることが分かる。この表現において、 ω は計算すれば、

$$\begin{aligned}\omega &= i^\varepsilon (g^{00})^m \theta^1 \theta^2 \dots \theta^{2m-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= i^\varepsilon (g^{00})^m i^{-\varepsilon} \hat{\omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。ここで $\hat{\omega}$ は W_{2m-1} の γ^5 なので、 ± 1 であり、 ε は $\hat{\omega}$ の定義の ε である。この時よく考えれば $\varepsilon = \varepsilon$ が分かる。よって実際に

$$\omega = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$$

である。 W_{2m} のこの表現による表示を Weyl 表示といい、この表示での $W_{2m}^\pm$ の元を Weyl spinor という。

この時、 $\mathbf{spin}(V_{2m})$ の元 $S^{ij} = -\frac{1}{4}[e^i, e^j]$ の表示は $i, j = 1, 2, \dots, 2m-1$ として

$$\begin{aligned}S^{ij} &= -\frac{1}{4}g^{00}[\theta^i, \theta^j] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ S^{0i} &= -\frac{1}{2}g^{00}\theta^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで計量が1つが -1 で他は全て $+1$ か、逆に1つが $+1$ で他は全て -1 である場合には θ^i が自己エルミートであることが示せる。それにはまず $\mathbf{Cl}(2m-1)$ の表示を考えるが、それには $\mathbf{Cl}(n+2) = \mathbf{Cl}(n) \otimes \mathbf{Cl}(2)$ の対応のところを考えたらいい。 $\mathbf{Cl}(2)$ は基底を σ_1, σ_2 に選ぶ。 $\mathbf{Cl}(3)$ にもやはりパウリ行列に i をかけたものを基底に選べばいい。こうすれば $\mathbf{Cl}(5)$ の基底が全て自己エルミートとなり、計量は全て -1 となる。後は σ_1, σ_2 を基底として $\mathbf{Cl}(2)$ を同じようにしてつけ

ていけば帰納的に $\mathbf{Cl}(2m-1)$ の基底が自己エルミートであり、計量が全て -1 であるように出来る。後は $\mathbf{Cl}(2m)$ を構成する時に g^{00} を -1 に取るか $+1$ に取るかで、残りの計量の成分は $+1$ か -1 になる。この場合には上の S^{ij} は反エルミートであり、 S^{0i} は自己エルミートになる。よって、 $\psi \in W_{2m}^-, \phi \in W_{2m}^+$ に対し、 $\psi^\dagger \phi$ 及び $\phi^\dagger \psi$ は $\mathbf{Spin}(2m)$ のもとでスカラーとなる。具体的にはスピノール表現上の計量を

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と取れば、

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij\dagger}} e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}} &= e e^{-\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}} e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}} \\ &= e\end{aligned}$$

となるからである。また、 V_{2m} の基底 e^i に対し、 $\phi, \psi \in W_{2m}$ とした時、 $\phi^\dagger e e^i \psi$ はベクトル表現になることも分かる。ここで $\phi^\dagger e = \bar{\phi}$ と置けば、 $\bar{\phi} \psi$ がスカラー。 $\bar{\phi} e^i \psi$ がベクトル表現である。

同様に今度は計量の成分全てが $+1$ または -1 の場合には θ^i が反エルミートであることが示せる。 $\mathbf{Cl}(2)$ の基底を今度は $i\sigma_1, i\sigma_2$ を選び、 $\mathbf{Cl}(3)$ の基底にパウリ行列を選ぶ。こうすれば $\mathbf{Cl}(5)$ の基底が全て反エルミートになり、計量は全て $+1$ になる。後は $i\sigma_1, i\sigma_2$ を基底をして $\mathbf{Cl}(2)$ をつけていけば帰納的に $\mathbf{Cl}(2m-1)$ の基底が全て反エルミートで計量が全て $+1$ であるように出来る。後は $\mathbf{Cl}(2m)$ の構成の際に g^{00} を $+1$ に取るか -1 に取るかで残りの計量の成分が全て $+1$ か -1 になる。この場合には S^{ij} はやはり反エルミートで、 S^{0i} も反エルミートとなる。よってこの場合には $\psi, \phi \in W_{2m}^\pm$ に対し、 $\psi^\dagger \phi$ が $\mathbf{Spin}(2m)$ のもとでスカラーとなる。スピノールの計量は1である。即ち

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij\dagger}} e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}} &= e^{-\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}} e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}S^{ij}} \\ &= 1\end{aligned}$$

である。また、 V_{2m} の基底 e_i に対して $\phi, \psi \in W_{2m}$ の時、 $\phi^\dagger \psi$ はスカラー、 $\phi^\dagger e^i \psi$ はベクトル表現である。

今度は計量の2成分だけが -1 で、他は全て $+1$ の場合でスピノールの計量がどうなるかを考える。こ

の場合には前の2つの場合ほど簡単ではない。考えなくてはいけないのはスピノールの計量 e に対して

$$eS^{ij}e^{-1} = -S^{ij\dagger}$$

とならなくてはならない。最初に S^{0i} について考える。まず、 $g^{00} = -1$ を取る。次に $\text{Cl}(2m-1) = \text{Cl}(2m-3) \otimes \text{Cl}(2)$ の分解の時、 $\text{Cl}(2)$ の基底を $\theta^1 = i\sigma_1, \theta^2 = \sigma_2$ に取る。 $\theta^1\theta^2 = i\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_3$ である。まず、これらがある行列 c による相似変換により $c\theta^ic^{-1} = -(\theta^i)^\dagger$ となるかどうかを考える。行列 c として

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を取れば、実際に $c\theta^ic^{-1} = -(\theta^i)^\dagger$ になっている。 c の相似変換のもとで $\theta^1\theta^2 = -\sigma_3$ は $c(-\sigma_3)c^{-1} = \sigma_3 = -(\theta^1\theta^2)^\dagger$ になる。よって残りの $\text{Cl}(2m-3)$ の基底に対しては、相似変換のもとでエルミート共役になればよい。残りをさらに分解して $\text{Cl}(2m-3) = \text{Cl}(2m-5) \otimes \text{Cl}(2)$ を考えれば、 $\text{Cl}(2)$ の基底はパウリ行列の σ_1, σ_2 でよい。これらは自己エルミートなのでこれらは1による相似変換となる。これらの積は $i\sigma_3$ であるが、このエルミート共役の -1 倍は $i\sigma_3$ 自身なので、残りの $\text{Cl}(2m-5)$ の基底も相似変換のもとでエルミート共役であればよいことになる。後は帰納的に、残り全ての分解に対して1による相似変換であればよいことになる。以上により S^{0i} は

$$e = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1$$

(1 は2行2列の単位行列) により $eS^{0i}e^{-1} = -S^{0i\dagger}$ となる。 S^{ij} は

$$\begin{aligned} eS^{ij}e^{-1} &= -\frac{1}{4}g^{00}[(\theta^i)^\dagger, (\theta^j)^\dagger] \\ &= \frac{1}{4}g^{00}[(\theta^j)^\dagger, (\theta^i)^\dagger] \\ &= \frac{1}{4}g^{00}[(\theta^i, \theta^j)]^\dagger \\ &= -S^{ij\dagger} \end{aligned}$$

となる。よって実際に e は $\text{Spin}(V_{2m})$ のもとで不変となり、スピノールの計量である。

逆に2つが $+1$ で他全てが -1 の計量の場合にも同様である。

以上のように一般的には、スピノールの計量を求めるのは簡単ではないと思われる。

スピノールの計量 e のもと $\phi, \psi \in W_{2m}$ の内積を

$$\langle \phi, \psi \rangle := \phi^\dagger e \psi$$

と書くことにする (物理では $\bar{\phi}\psi$ と書く)。

ここで注意をしておく。一般にこの内積の定義は、一般的にいう”内積”の定義からすると内積ではない。即ち一般にはここでの内積は正値性、及び正定値性を満たさない⁵。

6 スピン多様体

6.1 いくつかの定義

向きづけ可能な、計量を持つ多様体 M を考える。計量は局所正規直交基による表示で最初に与えた計量 g になるとする。向きづけ可能なので主 $\text{SO}(V)$ 束、 $\text{SO}(M)$ を考えられる⁶。この時構造群 $\text{SO}(V)$ が、前に与えた ad による対応により、スピン群に持ちあがるかどうかを考える。 $\text{SO}(V)$ の局所自明化を与える開被覆 $U_\alpha, U_\beta \in \{U_\alpha\}_\alpha$ の共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上での座標変換系 $g_{\alpha\beta} \in \text{SO}(TM)$ がそのまま $h_{\alpha\beta} \in \text{Spin}(TM)$ に持ちあがるかどうかということであるが、このスピン群による多様体上への貼り付けが矛盾なく出来ればよいことになる。もう少し詳しく言えば、 ad による対応はスピン群が2重被覆であるのでその対応が2通りありうることから矛盾が生じる可能性がある

⁵ 正値性は全ての ψ に対して

$$\langle \psi, \psi \rangle \geq 0 \quad (1)$$

であり、正定値性は

$$\langle \psi, \psi \rangle = 0 \Rightarrow \psi = 0 \quad (2)$$

という条件で与えられる。スピノールの計量が $e = 1$ の場合においてはこれらの条件を満たす。

⁶ ここで局所基底により計量の成分は $+1$ か -1 なので、 M の向きづけ可能性は $\det g_{ij}$ が M 上のどの点でも0にはならないと定義する。

る。開被覆 $U_\alpha, U_\beta, U_\gamma$ 、及びスピン群 $h_{\alpha\beta}, h_{\beta\gamma}, h_{\gamma\alpha}$ に対し

$$h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha} = 1$$

でなくてはならないが、1 ではなくて -1 であっても、その ad による対応はちゃんとなってるという感じ。これがちゃんと貼り付けられてる時、構造群をスピン群に持ちあげることが出来る。このように構造群をスピン群に持ちあげることが出来ることを M がスピン構造を持つという。詳しくはものの本に任せるが、スピン構造を持つことは第2ステューフェル-ホイットニー類が0であると述べられる。 M がスピン構造を持つ時、 M をスピン多様体という。

以下では M はスピン構造を持つと仮定する。上で考えたスピン群を構造群とするファイバー束を主 $\text{Spin}(V)$ 束といい、 $\text{Spin}(M)$ と書く。

$\text{Spin}(M)$ の同伴束として、構造群を $\text{Spin}(V)$ 、ファイバーをスピノール表現であるようなファイバー束 $\text{Spin}(M) \times W_n$ をスピノール束といい S で表す。スピノール束上の内積を

$$(\phi, \psi) = \int_M * \langle \phi, \psi \rangle$$

と定義する。ここで $*$ は Hodge 作用素である。スピノールの計量が $e = 1$ の場合（即ち Euclid 計量の場合）にはこの内積の定義のもとスピノール束はヒルベルト空間となる。

$\text{Spin}(M)$ の同伴束として、今度はファイバーがクリフォード代数 $\text{Cl}(V)$ であるファイバー束 $\text{Spin}(M) \times_{ad} \text{Cl}(V)$ をクリフォード束といい、 $\text{Cl}(M)$ と書く。

構造群をスピン群の複素化 $\text{Spin}^c(V)$ に持つ主 $\text{Spin}^c(V)$ 束を $\text{Spin}^c(M)$ と書く。この時、上と同じでスピン c 構造を持つという。また、スピン c 構造を持つ多様体をスピン c 多様体という。これもスピン構造と同じで ad により、 $\text{SO}(M)$ へ対応する。この場合にもスピン c 構造を持つかどうかの問題は、張り合わせがうまく出来るかどうかの問題にある。今度はスピン群だけでなく $U(1)$ もうまく張り合わせられるかどうかの問題になってくる。

6.2 スピン接続

多様体 M 上の接束 TM の局所正規直交基を $e_1, \dots, e_n$ とし、計量 g を

$$g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$$

とする。 η_{ij} は最初に与えた対角の計量行列であり

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

とする。この時、この基底の双対基を $\theta^1, \dots, \theta^n$ とすれば、計量は

$$g = \eta_{ij} \theta^i \theta^j$$

と書ける。ここで、一般的に $n \times n$ の行列値1次微分形式 A 、及び $\omega = \eta A$ で (η は上で与えた計量行列)

$$\begin{aligned} A &= -A^t \\ d\bar{\theta} &= -\omega \wedge \bar{\theta} \end{aligned}$$

を満たすものが唯一存在することが示せる。ここで $\bar{\theta}$ は θ^i のベクトル表示である（付録のベクトル束参照）。この $\omega = \eta A$ の族は TM に g を保つ接続を定義する。この接続をレビチビタ接続という。レビチビタ接続を ∇ で表すことにする。特にファイバーを明確にしたい時には ∇^{TM} と書く。第1式は $\nabla g = 0$ を表し、第2式は torsion free であることを表している。形式的には ∇ は

$$\begin{aligned} \nabla &= d + \omega \\ &= d + \frac{1}{2} \omega_{ij} S^{ij} \end{aligned}$$

と書ける。ここで S^{ij} は前に与えた、 $\mathfrak{so}(V)$ の元である。この時スピン接続とは、このレビチビタ接続のスピノール束への持ちあげである。具体的には、双対基 θ^i のクリフォード代数 $\text{Cl}(n)$ への対応を e^i と書き、 $S^{ij} = -\frac{1}{4}[e^i, e^j] \in \mathfrak{spin}(V)$ と書けば、

$$\nabla = d + \frac{1}{2} \omega_{ij} S^{ij}$$

である。このスピノール束上の接続をスピン接続という。ファイバーを明確にしたい時には ∇^S と書く。

クリフォード束 $Cl(M)$ 上の接続はクリフォード束に構造群 $Spin(V)$ が作用するので、自然にスピン接続より誘導される。クリフォード束としての局所自明な正規直交基を e^i とし、 $\psi \in \Gamma(S)$ とすれば

$$e^i \psi$$

に対する接続の作用がスピノール束への接続とクリフォード束の接続が自然に調和するようにクリフォード束上の接続を定義すればよい。従って $Cl(M)$ への $Spin(V)$ の作用は $\alpha \in Spin(V), v \in \Gamma(Cl(M))$ として

$$\alpha v \alpha^{-1} = ad(\alpha^{-1})v$$

となり、よって、 e^i への $Spin(V)$ の作用は ad により $SO(V)$ の作用になるので、接続形式は TM^* への接続の接続形式と同じになる。

7 ディラック作用素

M が向きづけ可能な多様体とし、 M 上のスピノール束 S 上のスピン接続 ∇ (∇^S) に対して、ディラック作用素は

$$\nabla = e^i \nabla_{e_i}$$

で定義される。ここで e^i はクリフォード束の切断 $\Gamma(Cl(M))$ の元としての、局所正規直交基 e_i の双対基である。flat な場合には局所基底として $e_i = \partial_i$ と取って、 $\nabla = e^i \partial_i$ と書ける。ここで $n = 2m$ の場合を考える。この時前述のようにスピノール表現は $W_{2m} = W_{2m}^L \oplus W_{2m}^R$ と書けた。これに伴い、ファイバー φ は

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_L \\ \varphi_R \end{pmatrix}$$

と分けられる。 e^i は

$$e^i = \begin{pmatrix} 0 & \theta_R^i \\ \theta_L^i & 0 \end{pmatrix}$$

の形で書けた。ここで

$$\theta_R^i = \begin{cases} -g_{00} & : i = 0 \\ -g_{00}\theta^i & : i \neq 0 \end{cases}$$

$$\theta_L^i = \begin{cases} 1 & : i = 0 \\ -\theta^i & : i \neq 0 \end{cases}$$

である。この表記のもと、ディラック作用素は

$$\nabla = \begin{pmatrix} 0 & \theta_R^i \nabla_{e_i} \\ \theta_L^i \nabla_{e_i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=: \begin{pmatrix} 0 & \nabla_R \\ \nabla_L & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで、ディラック作用素の共役作用素を考える。スピノールの計量 e に対して（以下の場合それぞれについて前に与えたものとする）、

1) 1 つが -1 で他全て $+1$ （またはその逆）の場合には、 $(e^i)^\dagger = ee^i e$ となる。

2) 全てが $+1$ または -1 の場合には、 $(e^i)^\dagger = -g^{00}e^i$ となる。この場合にはスピノールの計量は $e = 1$ である。

3) 2 成分が -1 で他は全て $+1$ （またはその逆）の場合、 $(e^i)^\dagger = -ee^i e$ となる。

いずれの場合にも $(e^i)^\dagger = \pm ee^i e$ となる。よって符号が $+$ の場合には

$$\langle e^i \phi, \psi \rangle = \langle \phi, e^i \psi \rangle$$

となり、よって $\frac{1}{i}\nabla = \frac{1}{i}e^i \nabla_{e_i}$ (i の逆数になってるのは物理の慣習に合わせた) は、 e_i を局所自明な正規直交基とすれば（即ち $\nabla e_i = 0$ ）

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{i}\nabla \phi, \psi \rangle &= -\langle \nabla_{e_i} \phi, \frac{1}{i}e^i \psi \rangle \\ &= \langle \phi, \frac{1}{i}e^i \nabla_{e_i} \psi \rangle - e_i \langle \phi, \frac{1}{i}e^i \psi \rangle \\ &= \langle \phi, \frac{1}{i}\nabla \psi \rangle - e_i \langle \phi, \frac{1}{i}e^i \psi \rangle \end{aligned}$$

となる。ここで $X^i = \langle \phi, \frac{1}{i} e^i \psi \rangle$ と置いて 1-vectro の成分とみなせば、

$$e_i X^i e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = (-1)^{i-1} e^i \wedge \nabla_{e_i}^{TM*} (X^i) \wedge e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = d \left((-1)^{i-1} X^i e^1 \wedge \cdots \wedge e^n \right)$$

となり、よって

$$* \langle \frac{1}{i} \nabla \phi, \psi \rangle = * \langle \phi, \frac{1}{i} \nabla \psi \rangle - d^* X$$

となる（右辺の $*$ は dual テンソルである。詳しくは”幾何のお話”note 参照）。よって、 M に境界がなければ

$$\langle \frac{1}{i} \nabla \phi, \psi \rangle = \langle \phi, \frac{1}{i} \nabla \psi \rangle$$

と自己共役作用素になる。符号が $-$ の場合には

$$\langle e^i \phi, \psi \rangle = - \langle \phi, e^i \psi \rangle$$

となり、 $X^i = \langle \phi, e^i \psi \rangle$ と置けば

$$* \langle \nabla \phi, \psi \rangle = * \langle \phi, \nabla \psi \rangle - d^* X$$

となり、よって M に境界がなければ、同様にして $\nabla = e^i \nabla_{e_i}$ が

$$\langle \nabla \phi, \psi \rangle = \langle \phi, \nabla \psi \rangle$$

と自己共役作用素となる。前者の場合には $D = \frac{1}{i} \nabla$ 、後者の場合には $D = \nabla$ と置いて、これをディラック作用素ということもある。 ∇ の行列表記より D_L, D_R が定義出来る。

スピノール束 S はスピノール表現の分解 $W_{2m} = W_{2m}^L \oplus W_{2m}^R$ により、 $S = S^L \oplus S^R$ と分解出来る。よって超空間である（トポロジーの note 参照）。またディラック作用素 D は

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_R \\ D_L & 0 \end{pmatrix}$$

と書け、超空間上の共役作用素 $D^\dagger = D$ であるので、マッキーン・シンガーの定理より

$$\text{ind} D = \text{Stre}^{-tD^2}$$

$$\text{ind} D := \dim \text{Ker} D_L - \dim \text{Ker} D_R$$

である。これをさらに推し進めて、 Stre^{-tD^2} を計算すれば、指数定理が得られるが詳細は述べず、以下に結果だけ書いておく。

M を偶数次元 $n = 2m$ のスピノ多様体であるとする。 S をスピノール束、 E を M 上のベクトル束とする。 D を $\Gamma(E \otimes S)$ 上のディラック作用素とすると（即ち $D = e^i \nabla_{e_i}^{E \otimes S}$ ）、

$$\text{ind} D = \int_M A(TM, \nabla^{TM}) ch(E, \nabla^E)$$

と書ける。ここで $A(TM, \nabla^{TM})$ は A 形式、 $ch(E, \nabla^E)$ は Chern 指標形式である（詳しくは”ゲージ理論”note 参照）。また、積分は n-form だけを取り出して積分しているものとする。よって奇数次元では 0 である。特に M 上のスピノール束 S の場合には

$$\text{ind} D = \int_M A(TM, \nabla^{TM})$$

となり、ディラック作用素の指数は A 種数に等しくなる。これも n-form だけ取り出して積分しているものとする。同様に奇数次元では 0 である。

A notation

A.1 パウリ行列

ここで扱う notation について、まずパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これらの反交換関係は

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

となる。

A.2 一般線形代数

$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ とし、 $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 行 n 列行列全体からなる代数を $M(n, \mathbb{K})$ と書く。代数とは環の構造にスカラー倍が定義されているものである。特に $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の時は簡単に $M(n)$ と書く。

A.3 ベクトル束

ベクトル束を P で表す。底空間を M とする。 P の局所基底を e_i ($i = 1, \dots, r$) とすると P の切断 v は $v = e_i v_i$ と書ける。接続（共変微分）を ∇ とし、接続形式を ω とすれば、 $\nabla v = e_i (dv_i + \omega_{ij} v_j)$ である（形式的には $\nabla = d + \omega$ ）。これはベクトルで表せば、 $\nabla v = \mathbf{e}^t (d\mathbf{v} + \omega \mathbf{v})$ と書ける。この時曲率は $\nabla^2 = d\omega + \omega \wedge \omega$ となる（行列としては積を取る）。詳しくは”ゲージ理論”note を参照のこと。