実解析のお話

TKG

2025 年 3 月 3 日

目 次

1 INTRODUCTION **1**

2 極限 **2**
2.1 数列の極限 2
2.2 関数の連続性 2

3 ORDER **2**
3.1 数列の ORDER 2
3.2 関数の order 2

4 級数 **3**
4.1 収束性 3

5 微分 **3**

6 積分 **3**

7 増加、減少関数 **4**

8 逆関数 **4**
8.1 連続関数の逆関数も連続であること . 4
8.2 逆関数の微分 4

9 微分と積分の関係 **4**
9.1 微分の積分がもとに戻ること 4
9.2 積分の微分がもとに戻ること 5

10 部分積分 **5**

11 積分の積分変数を変更すること **5**

12 テイラー展開 **5**

13 関数列 **6**
13.1 order 6
13.2 収束性 6
13.3 積分の収束性 6

14 関数の級数 **6**

15 冪級数 **7**
15.1 収束性 7
15.2 一致性 7
15.2.1 1 7
15.2.2 2 7

16 多変数関数 **8**
16.1 連続性 8
16.2 微分 8
16.3 逆関数 8
16.4 線積分 8
16.5 多重積分 8

1 INTRODUCTION

ここでは簡単な実解析の基礎的なお話をする。前提とする知識は、実数や複素数についての簡単な知識くらいである。これらを習得していれば、さらに複素関数論へ進むのに困難はないと思う。解析学はその考察の範囲を複素数にまで及んだときにこそ、その美しい姿を現すが、それにはともかく実解析を扱いこなせるくらであるほうが望ましい。そういうわけで先ずは、実解析の基礎的なお話から。

2 極限

2.1 数列の極限

極限について。先ず、数列 $a_n\ (n = 1, 2, 3, ...)$ に対し、

$$a_n = \alpha + \varepsilon_n \tag{1}$$

と書いたとき、どんな任意の正の数 ε をとっても、ある n_0 があり、

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon \text{ for } \forall n \geq n_0 \tag{2}$$

と出来る時、a_n は α に収束するという。これは簡単に

$$\lim_{n \tilde{\omega} \infty} a_n = \alpha \tag{3}$$

または、簡単に

$$a_n \to \alpha\ (n \to \infty) \tag{4}$$

とも書く。この時、この α を極限という。

2.2 関数の連続性

関数 $f(x)$ に対して (x は real number)

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x) \tag{5}$$

と書いたとき、どんな任意の正の数 ε をとっても、ある $\Delta > 0$ があり、

$$|\varepsilon(x)| < \varepsilon \text{ for } \forall x : |x - x_0| < \Delta \tag{6}$$

と出来る時、$f(x)$ は x_0 で連続であるという。これは簡単に

$$f(x) \to f(x_0)\ (x \to x_0) \tag{7}$$

と書く。

3 ORDER

3.1 数列の ORDER

数列 $a_n, b_n\ (n = 1, 2, 3, ...)$ に対し、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があり、$\forall n \geq n_0$ に対し、ある正の数 M があり、

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < M \tag{8}$$

であるとき、a_n は b_n の order であるといい、

$$a_n = \mathcal{O}(b_n)\ (n \to \infty) \tag{9}$$

と書く。混乱の恐れがない場合は $(n \to \infty)$ を省略して書く。

もし、

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to 0\ (n \to \infty) \tag{10}$$

であるとき、

$$a_n = o(b_n)\ (n \to \infty) \tag{11}$$

と書く[1]。(11) であれば、当然 (8) でもある。

3.2 関数の order

関数 $f(x), g(x)$ に対し、ある正の数 M があり、x が x_0 の十分近くにあれば、常に、

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < M \tag{12}$$

である時、

$$f(x) = \mathcal{O}(g)\ (x \to x_0) \tag{13}$$

と書く。

もし、

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to 0\ (x \to x_0) \tag{14}$$

である時、

$$f(x) = o(g)\ (x \to x_0) \tag{15}$$

と書く[2]。

[1] 数列の収束性は

$$a_n - \alpha = o(1)\ (n \to \infty)$$

とも書ける。

[2] 関数の連続性は

$$f(x) - f(x_0) = o(1)\ (x \to x_0)$$

4　級数

数列 a_n に対し、数列 A_N を

$$A_N := \sum_{n=1}^{N} a_n \tag{16}$$

とした時、A_N を級数という。、これが $N \to \infty$ で収束する時、その極限を収束級数または、混乱の恐れがない場合には単に級数といい

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{17}$$

と書く。

4.1　収束性

上の級数が収束するとして、その極限を A とする。この時、収束の定義から

$$A - A_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = o(1) \ \ (N \to \infty) \tag{18}$$

これは

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n \tag{19}$$

が、$N \to \infty$ で有限の値 $A - A_{n_0-1}$ に収束し、かつそれが $o(1)$ $(n_0 \to \infty)$ であることを意味している。従って、級数の収束性は、(19) を評価すれば良いことが分かる。

この a_n に対し、数列 b_n があり、(9) であれば、

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_0}^{N} a_n \right| &\leq \sum_{n=n_0}^{N} |a_n| \\ &\leq M \sum_{n=n_0}^{N} |b_n| \end{aligned} \tag{20}$$

つまり

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n = \mathcal{O}\left(\sum_{n=n_0}^{N} |b_n| \right). \tag{21}$$

[3] よって、$\sum b_n$ が収束すれば、$\sum a_n$ も収束する。

とも書ける。

[3] 端的にいえば、任意の数列 b_n に対して

$$\sum \mathcal{O}(b_n) = \mathcal{O}(\sum |b_n|).$$

5　微分

関数 $f(x)$ が、$x \to x_0$ の時、

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + o(x - x_0) \tag{22}$$

と書ける時、$f(x)$ は x_0 で微分可能であるといい、α を f の微係数という。また、

$$\alpha =: \dot{f}(x_0) =: \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \tag{23}$$

と書く。明らかに $f(x)$ が x_0 で微分可能であれば、x_0 で連続である。

6　積分

関数 $f(x)$ が、$x \in [a, b]$ $(real)$ で定義されているとする。こと時、区間 $[a, b]$ を n 個の区間に分割して、i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ 番目の区間の間の任意の点を x_i とし、その区間の間隔を Δx_i とする。今、$n \to \infty$ とした時、$\max\{\Delta x_i : i = 1, 2, 3, ..., n\} \to 0$ となるとして、

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \tag{24}$$

が収束する時、$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で積分可能であるといい、その極限値を

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{25}$$

と書き、これを f の積分という。これが上で取った細分によらないことの証明はここでは省略する。後に多重積分の節で一般的な証明を与える。ここでは f が区分的に連続である時には細分によらないとだけ言っておく。

(24) より、明らかに

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{26}$$

が分かる。

と表せる。もちろん、$\mathcal{O}$ の代わりに、o でも成立する。

また、(13) であれば、

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq M\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x \tag{27}$$

となる。これも数列の和の時のように $\mathcal{O}$ で表せる。また、(15) であれば、o でも表せる。

7 増加、減少関数

関数 $f(x)$ が (x は real) $x < y$ の時、常に

$$f(x) < f(y) \quad or \quad f(x) > f(y) \tag{28}$$

となる時、それぞれ、増加関数、減少関数という。(28) に等号を許す時、それぞれ、単調増加、単調減少という。

8 逆関数

増加関数 $f(x)$ (或いは減少でもいいが、ここでは増加関数に限っても一般性を失わない) は $y = f(x)$ と書いたとき、x と y は 1 対 1 に対応する。よって逆に x が y の関数であるとみなせる。これを $x = f^{-1}(y)$ と書き、f^{-1} を f の逆関数という。

8.1 連続関数の逆関数も連続であること

増加関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとする。即ち x が x_0 に近づく時 $f(x)$ も $f(x_0)$ に近づくとする。x と $y = f(x)$ が 1 対 1 なので、逆に $y = f(x)$ が $y_0 = f(x_0)$ に近づく時、x は x_0 に近づかないといけない。即ち

$$x \to x_0 \Leftrightarrow y \to y_0 \tag{29}$$

或いは、言い換えると、増加関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続なことと、$f^{-1}(y)$ (これも増加関数) が $y = y_0$ で連続なことと同値である。

8.2 逆関数の微分

増加関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であるとする。(22) より

$$x = x_0 + \frac{1}{\alpha}(f(x) - f(x_0)) + o(x - x_0). \tag{30}$$

ここで $x = f^{-1}(y), y = f(x)$、及び (30) より

$$x - x_0 = \mathcal{O}(y - y_0) \tag{31}$$

なので

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + \frac{1}{\alpha}(y - y_0) + o(y - y_0) \tag{32}$$

となり、$f^{-1}(y)$ も $y = y_0$ で微分可能となる。また

$$\begin{aligned} \dot{f^{-1}}(y_0) &= \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_0) \\ &= \frac{1}{\dot{f}(x_0)} \end{aligned} \tag{33}$$

が分かる。

9 微分と積分の関係

9.1 微分の積分がもとに戻ること

関数 $f(X)$ が微分可能であるとする。区間 $[a, b]$ を n 個の区間 $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ ($x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, x_0 = a, x_n + \Delta x_n = b$) に分割する。この時

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_i)\Delta x_i + o(\Delta x_i)\right] \tag{34}$$

となるが、各区間の間隔 Δx_i を

$$\Delta x_i = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

ととれば、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} o(\Delta x_i) &= \sum_{i=1}^{n} o(\frac{1}{n}) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

となる。よって (34) は、$n \to \infty$ で、左辺が明らかに

$$f(b) - f(a) \tag{35}$$

であるので、右辺も有限の値に収束し

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_i)\Delta x_i\right]+o(1)\to\int_a^b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x. \tag{36}$$

従って、

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=f(b)-f(a). \tag{37}$$

(37) を b の関数であると思うと、当然微分可能で、その微分は $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(b)$ になる。

9.2 積分の微分がもとに戻ること

関数 f が連続で積分可能であるとする。また、

$$\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=:F(x) \tag{38}$$

と置く。この時

$$\begin{aligned}F(x+\Delta x)-F(x)&=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+\Delta x}\Big[f(x)+o(1)\Big]\mathrm{d}t\\&=f(x)\Delta x+o(\Delta x).\end{aligned} \tag{39}$$

よって $F(x)$ は微分可能となり、微係数は $f(x)$ となる。これからも (37) が出る。

10 部分積分

微分可能な関数 f,g に対し、容易に

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f(x)g(x)\Big)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)g(x)+f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) \tag{40}$$

が分かる。よってこれを $[a,b]$ で積分すれば

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b\dot{f}g\mathrm{d}x+\int_a^bf\dot{g}\mathrm{d}x \tag{41}$$

となる。これは部分積分と呼ばれる。

11 積分の積分変数を変更すること

微分可能な増加関数 $y=g(x)$ 及び、関数 $f(x)$ に対し、f を $y=g(\alpha)=a$ から $y=g(\beta)=b$ まで積分すると、

$$\begin{aligned}\int_a^bf(y)\mathrm{d}y&=\sum_{i=1}^{n}f(y_i)\Delta y_i+o(1)\\&=\sum_{i=1}^{n}f(y_i)\left[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_i)\Delta x_i+o(\Delta x_i)\right]\\&\qquad\qquad+o(1)\\&=\sum_{i=1}^{n}f(y_i)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_i)\Delta x_i+o(1)\\&\to\int_\alpha^\beta f(y_i)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_i)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{42}$$

よって

$$\int_a^bf(y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta f(y_i)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_i)\mathrm{d}x_i \tag{43}$$

となる。

12 テイラー展開

(41) で $f=u,g=\int v$ と置き、u が何回も微分可能であるとする。部分積分を繰り返し使うと

$$\begin{aligned}\int uv&=u\int v-\int\dot{u}\int v\\&=u\int v-\dot{u}\iint v+\int\ddot{u}\iint v\\&=u\int v-\dot{u}\iint v+\iiint v-\int\dddot{u}\iiint\!\!\int v\\&\qquad\vdots\end{aligned}$$

さらにここで $u=\dot{g}(x),v=1$ と置けば、

$$\overbrace{\int_{x_1}^{x_0}\cdots\int_{x_1}^{x_0}}^{n}1\mathrm{d}x_0=\frac{1}{n!}(x_0-x_1)^n \tag{44}$$

より、テイラー展開

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_0) + \dot{g}(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{\ddot{g}(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \frac{g^{(n+1)}}{n!}(x_1 - x_0)^n \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{45}$$

が導かれる。第 3 段目の項が $n \to \infty$ で $\to 0$ であるならば、

$$g(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n \tag{46}$$

と書ける。ちなみに最初に与えた u, v にいろんな関数を代入することで様々な自明でない関数の級数表示が得られるが、詳しくは説明しない。

13 関数列

13.1 order

区間 $[a, b]$ で定義された"関数列" $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ 及び、$g_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ に対し、ある n_0 があり、全ての $x \in [a, b]$ で常に

$$\left| \frac{f_n(x)}{g_n(x)} \right| < M \ \ (> 0) \ \ \text{for} \ \ \forall n \geq n_0 \tag{47}$$

となる時、

$$f_n(x) = \mathcal{O}\Big(g_n(x) \Big) \ \ (n \to \infty) \tag{48}$$

と書く。

どんな任意の正の数 ε をとっても、ある n_0 があり、全ての $x \in [a, b]$ で常に

$$\left| \frac{f_n(x)}{g_n(x)} \right| < \varepsilon \ \ \text{for} \ \ \forall n \geq n_0 \tag{49}$$

となる時

$$f_n(x) = o\Big(g_n(x) \Big) \ \ (n \to \infty) \tag{50}$$

と書く。

13.2 収束性

関数列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ がどれも区間 $[a, b]$ で定義されているとする。この時ある関数 f があり、この区間の全ての点 x_0 に対し $f_n(x_0)$ が

$$f_n(x_0) \to f(x_0) \ \ (n \to \infty) \tag{51}$$

である時、f_n は f に各点収束する、或いは単に収束するといい $f_n \to f$ と書く。

$f(x) - f_n(x) = o(1)$ $(n \to \infty)$ の時、f_n は f に一様に収束するという。これは上の各点収束より強い条件である。

ここで 1 つの例として

$$f(x) = \begin{cases} n & : \ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & : \ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{52}$$

を考える。これは明らかに $f = 0$ に各点収束する。しかし、$\max|f_n| = n \not\to 0$ なので一様ではない。

13.3 積分の収束性

積分可能な関数列 f_n が $[a, b]$ で一様に $f_n \to f$ とする。また、これらは積分可能であるとする。この時

$$\begin{aligned} \int_a^b \Big[f_n(x) - f(x) \Big] \mathrm{d}x &= \int_a^b o(1) \mathrm{d}x \\ &= o(1). \end{aligned} \tag{53}$$

よって $f(x)$ も積分可能で $\int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x \to \int_a^b f \mathrm{d}x$ となる。

もし、収束が単に各点収束であるとそうとは限らない。例として上述の (52) を取ると、$f_n \to f$ だが

$$\int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x = 1 \ , \ \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{54}$$

となる。

14 関数の級数

関数列 $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ に対し

$$F_N(x) := \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \tag{55}$$

としたとき、これが $N \to \infty$ で収束する時、$F_N(x)$ の極限 $\lim F_N(x) = F(x)$ を関数の級数という。

15 冪級数

(55) で、ある数列 a_n があり、$f_n(x) = a_n x^n$ と書ける時、$F(x) = \lim F_N(x)$ を冪級数という。

15.1 収束性

ある x_0 に対し、冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束するとする。この時 $|x| < |x_0|$ とすれば、

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_0}^{N} a_n x^n \right| &\leq \sum_{n=n_0}^{N} |a_n||x|^n \\ &= \sum_{n=n_0}^{N} |a_n||x_0|^n \left| \frac{x}{x_0} \right|^n . \end{aligned} \quad (56)$$

ここで $\sum a_n x_0^n$ が収束することから、$a_n x_0^n \to 0$ $(n \to \infty)$。よって

$$|a_n||x_0|^n < M \quad \text{for} \quad \forall n \quad (57)$$

となる。従って、(56) は

$$< \sum_{n=n_0}^{N} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n .$$

従って、

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_0}^{N} a_n x^n \right| &= M \frac{\left| \frac{x}{x_0} \right|^{n_0}}{1 - \left| \frac{x}{x_0} \right|} \\ &\to 0 \quad (n_0 \to \infty). \end{aligned} \quad (58)$$

よって冪級数は $|x| < |x_0|$ なる任意の x で収束する。

上の証明から

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n||x|^n \quad (59)$$

も収束する（絶対収束するという）。さらに $|y| < |x_0|$ なる任意の y に対し、x を $|y| \leq |x| < |x_0|$ と取れば、

$$\begin{aligned} \left| \sum a_n y^n \right| &\leq \sum |a_n||y|^n \\ &\leq \sum |a_n||x|^n \end{aligned} \quad (60)$$

なので、この x に対し、上と同じ議論ができるので、$\sum a_n y^n$ は一様に収束する。

冪級数 $\sum a_n x^n$ が x_0 で収束すると、$|x| < |x_0|$ なる任意の x で、絶対一様収束する。その冪級数の収束する領域を、収束円といい、冪級数の収束する x の絶対値の上限を収束半径という。全ての x で収束するのであれば、収束半径は ∞ と定義する。

15.2 一致性

15.2.1 1

冪級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ の収束円内の 0 ではない点 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(x_n \neq 0, x_n \to 0)$ の全てにおいて $f(x_n) = 0$ とすると

$$\begin{aligned} 0 = f(x_n) &= a_0 + x_n\big(a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + \dots\big) \\ &= a_0 + o(1) \quad (n \to \infty). \end{aligned} \quad (61)$$

よって $a_0 = 0$、即ち $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ が分かる。

さらに $\frac{f(x)}{x}$ に対しても、$\frac{f(x_n)}{x_n} = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ よって

$$\begin{aligned} 0 = \frac{f(x_n)}{x_n} &= a_1 + x_n\big(a_2 + a_3 x_n + \dots\big) \\ &= a_1 + o(1) \end{aligned} \quad (62)$$

となり、再び $a_1 = 0$。さらにまた、$\frac{f(x)}{x^2}$ に対して... と同様の議論が続けられ、結局全ての a_n が 0 となり、$f(x) = 0$ となる。

15.2.2 2

2 つの冪級数 $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n$ に対して、それらの収束円の共通の領域内の点 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(x_n \neq 0, x_n \to \infty)$ において

$$f(x_n) = g(x_n) \quad (63)$$

である時、$f(x) - g(x)$ に対して上の議論をすれば、$f(x) = g(x)$ となることが分かる。

16　多変数関数

多変数関数 $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = f^{\mu}(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} = (x^1, x^2, ..., x^n), \mu = 1, 2, ..., m)$ に関して。

以下では、ベクトルは常に縦ベクトルであるとする（表記は都合、横ベクトルで書く）。

16.1　連続性

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon(\mathbf{x}) \tag{64}$$

$(\varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^m))$ と書いた時、

$$\varepsilon(\mathbf{x}) \to 0 \quad (\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0) \tag{65}$$

の時 $\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}_0$ で連続であるという。

16.2　微分

ある m 行 n 列の行列 $\mathbf{A}$ があって

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \tag{66}$$

と書ける時、$\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}_0$ で微分可能であるといい、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)\right)_{\mu i} \\ &= : \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \tag{67}$$

を微分という。行列として見た時には、変換行列ともいう。

16.3　逆関数

特に $n = m$ の時。関数 $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ が $\mathbf{y}_0$ 微分可能であるとする。さらにその微分が逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を持つとする。その時 (66) より

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0(\mathbf{x}_0)) + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \tag{68}$$

上式より

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \mathcal{O}(|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|). \tag{69}$$

よって、$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ の近傍では、逆に $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ の関係があり、

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}_0(\mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + o(|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0) = \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)\right)^{-1} \tag{70}$$

と書ける。

16.4　線積分

ここでも $n = m$ とし、関数 $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ 及び、$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), (t \in [\alpha, \beta])$ に対し $\mathbf{y}$ の $\mathbf{a} = \mathbf{x}(\alpha)$ から $\mathbf{b} = \mathbf{x}(\beta)$ までの（曲線 $\mathbf{x}(t)$ に沿った）線積分は

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{y} \mathrm{d}\mathbf{x} := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{y} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t) \mathrm{d}t \tag{71}$$

で定義される。曲線を C で表せば、

$$\int_C \mathbf{y} \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{72}$$

と書く。

特に曲線が閉曲線、即ち $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ であれば

$$\oint_C \mathbf{y} \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{73}$$

と書く。

16.5　多重積分

関数 $f(\mathbf{x})$ が $\mathbb{R}^n$ の適当な開集合 U 上で定義されているとする。また、U は $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ の領域で囲まれるとする。また、各 $[a_i, b_i]$ を N 分割し、第 k 番目の区間内の任意の点を x_k^i としその区間の間隔を Δx_k^i とする。$N \to \infty$ の時、$\Delta x_k^i \to 0$ であるとする。この時 $\delta_{k_1 k_2 \cdots k_n}$ を $(x_{k_1}^1, \cdots, x_{k_n}^n)$ が U に含まれているならば 1、含まれてないならば 0 として、

$$\sum_{k_1, \cdots, k_n = 1}^{N} \delta_{x_{k_1}^1 \cdots x_{k_n}^n} f(x_{k_1}^1, \cdots, x_{k_n}^n) \Delta x_{k_1}^1 \cdots \Delta x_{k_n}^n \tag{74}$$

が収束する時、f は U 上で積分可能であるといい、その極限値を

$$\int_U f(\mathbf{x})\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n \tag{75}$$

で表し、これを f の U 上での積分という。これが上で取った細分によらないことの証明は後で説明する。また、この区分は上では"直方体"に取ったが、実際にはその必要はない。U を N^n 個の領域（半径 $\sim \frac{1}{N}$ の n 次元球に囲まれるような領域）に区分けして、$N\to\infty$ でその領域の n 次元体積が最大のものが $\to 0$ であるようにとればよい。後は、その各微小領域の n 次元体積と、その領域内の任意の点での f の値との積を取ったもの全ての和の極限として積分が定義出来る。この定義による積分の値が、細分によらないことは以下のように考えればよい。また、議論を簡単にするために f は連続であるとする。まず、細分が全く同じで、細分内の f の値を与える点を他の点に変えても収束値が変わらないことを示す。まず細分に対して N^n 個の領域に順番を付ける。i $(i=1,\cdots,N^n)$ 番目の領域内の 2 つの任意の点 x_i、y_i に対して $f(x_i)$ と $f(y_i)$ の差は $N\to\infty$ に対して $\sim o(1)$ となる。i 番目の n 次元体積は $\sim \frac{1}{N^n}$ なので、その領域内での $f\Delta x^1\cdots\Delta x^n$ の差は $\sim o(\frac{1}{N^n})$ となる。よって N^n 個全ての領域に対して足し上げたものの差は $\sim o(1)$ となる。よって積分値は一致する。次に細分を 2 通りとる。それぞれの細分に A_N、B_N と名前を付けておく。添え字の $_N$ は N^n 個の領域に分けてあるという意味である。さらにこの 2 つの細分のそれぞれの微小領域の共通領域からなる、さらに細かい細分 C_N を作る。A_N の細分の領域をまた順番を付けて i $(i=1,\cdots,N^n)$ 番目の領域を a_i と置く。a_i に含まれる C_N の細分の領域だけ見てみると、a_i に対する (74) と a_i に含まれる C_N の微小領域に対する (74) の差は、f の値に選ぶ点の取り方による誤差の和と微小領域の n 次元体積との積に等しいので、$\sim o(\frac{1}{N^n})$ 程度。よって積分領域全体にわたる、細分 A_N と細分 C_N との (74) の差の和は $\sim o(1)$ 程度となり、よって A_N による細分と C_N の細分それぞれに対する (74) の差は $N\to\infty$ で 0 となる。これは B_N と C_N についても同様である。よって A_N と B_N のどちらの細分で取っても積分値は同じになることが分かる。

次に任意の 2 つの座標系 $\mathbf{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$、$\mathbf{y}=(y^1,y^2,\cdots,y^n)$ を取った時、積分変数を $\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ に変えた時どうなるかを見てみる。

まず、ベクトル $\mathbf{a}^1,\mathbf{a}^2,\cdots,\mathbf{a}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の一次独立なベクトルとする。この時原点、$\mathbf{a}^1,\mathbf{a}^2,\cdots,\mathbf{a}^n$、及び $\mathbf{a}^1+\cdots+\mathbf{a}^n$ により囲まれる領域の n 次元体積は行列

$$A:=\begin{pmatrix}\mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \cdots & \mathbf{a}^n\end{pmatrix} \tag{76}$$

の行列式 $\det A$ の絶対値に等しいことを示す。まず、n-1 次元までは正しいとして帰納的に示す。各 $\mathbf{a}^i$ は 1 次変換 P による座標変換のもと

$$\begin{aligned}\acute{A}=PA &= \begin{pmatrix}P\mathbf{a}^1 & P\mathbf{a}^2 & \cdots & P\mathbf{a}^n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\acute{\mathbf{a}}^1 & \acute{\mathbf{a}}^2 & \cdots & \acute{\mathbf{a}}^n\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{77}$$

と変換する。この時 $\det P=1$ であるとする。この座標変換により $\acute{\mathbf{a}}^n$ を第 n 成分が a で、他の成分を 0 であるよう出来る。これにより $\acute{A}$ は

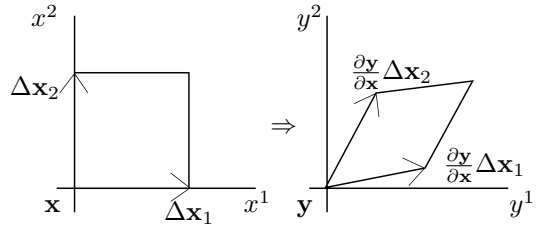
$$\acute{A}=\begin{pmatrix}a^{11} & a^{12} & \cdots & 0\\ a^{21} & a^{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ a^{n1} & a^{n2} & \cdots & a\end{pmatrix} \tag{78}$$

の形になる。後は、この行列の n 行と n 列の部分を除いた部分の行列の行列式の絶対値 S が、原点と $\acute{\mathbf{a}}^1,\cdots,\acute{\mathbf{a}}^{n-1}$、$\acute{\mathbf{a}}^1+\cdots+\acute{\mathbf{a}}^{n-1}$ により囲まれる領域を、第 n 成分を除いた $\mathbb{R}^{n-1}$ へ射影した領域の n-1 次元体積に等しいので（n 行は各 $\acute{\mathbf{a}}^i$ の第 n 成分なので、これを除いた部分は第 n 成分を除いた $\mathbb{R}^{n-1}$ への射影となる）、$\det\acute{A}=\det A=aS$ となり、これ（の絶対値）は実際に n 次元体積である。

次に $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の間の関係 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})$ より、

$$\Delta\mathbf{y}=\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\Delta\mathbf{x}+o(|\Delta\mathbf{x}|) \tag{79}$$

これは x 座標系での単位ベクトルに平行な微小なベクトル $\Delta\mathbf{x}_i$ が $\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}$ による 1 次変換により、下図のように（簡単に 2 次元で）対応する。



この図のように、原点、$\Delta\mathbf{x}_1, \cdots, \Delta\mathbf{x}_n$、$\Delta\mathbf{x}_1 + \cdots + \Delta\mathbf{x}_n$ により囲まれる領域が、原点、$\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\Delta\mathbf{x}_i \quad (i = 1, \cdots, n)$、及び $\sum_i \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\Delta\mathbf{x}_i$ により囲まれる領域に移る。よってその微小領域の n 次元体積は

$$\begin{aligned} &\left|\det\left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x}_1 & \cdots & \Delta\mathbf{x}_n \end{pmatrix}\right)\right| \\ &= \left|\det\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\right| \Delta x^1 \cdots \Delta x^n \end{aligned} \tag{80}$$

よって領域 U が $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ により D に移るとした時、$\mathbf{y}$ 上の関数 $f(\mathbf{y})$ の U 上の積分は

$$\begin{aligned} &\int_D f(\mathbf{y})\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^n \\ &= \int_U f(\mathbf{y}(\mathbf{x}))\left|\det\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\right| \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \end{aligned} \tag{81}$$

となることが分かる。(79) の右辺第 2 項から来る誤差は $\sim o(\frac{1}{N})$ であり、よって (80) への誤差は $\sim o(\frac{1}{N^n})$。よって和を取る時には極限を取れば消える。