

解析の話発展編

TKG

2025 年 5 月 2 日

目 次

1	INTRODUCTION	1
2	ガンマ関数	1
3	ベータ関数	3
4	ベキ級数の係数の関数への拡張	4
5	関数の様々な表示	7
6	ゼータ関数	7
7	ゼータ関数に類似の関数	10
8	特殊関数	11

1 INTRODUCTION

ガンマ関数とかゼータ関数の解析接続とかちょびっとトピックをノートにしました。

2 ガンマ関数

ガンマ関数は $s > 0$ に対して

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (1)$$

で定義される。積分の収束性は $x = 0$ の近傍で $x^{s-1} e^{-x} = x^{s-1} + \mathcal{O}(x^s)$ となることと、 x が十分大きければ $x^{s-1} e^{-x} < e^{-\frac{1}{2}x}$ より、 $s > 0$ で収束することが分かる。簡単な計算により $\Gamma(1) = 1$ が分かる。また $s > 0$ に対して、部分積分を使うことにより

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx = [-x^s e^{-x}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = s\Gamma(s) \quad (2)$$

即ち

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (3)$$

が分かる。よって $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ が分かる。(3) のような関数の関係式を関数等式という。
また $s = \frac{1}{2}$ の時、

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt \quad (x = t^2) \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt\end{aligned}\tag{4}$$

よって

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} r \\ &= \pi \int_0^\infty e^{-t} dt \quad (r^2 = t) \\ &= \pi\end{aligned}\tag{5}$$

従って $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ が分かる。(3) より $\Gamma(s)$ の $s = 0$ 近傍での振る舞いは

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\Gamma(s) = 1\tag{6}$$

が分かる。言い換えれば $s = 0$ で 1 位の pole を持ち、その 1 位の値は 1 である。ガンマ関数の定義 (1) の積分は、明らかに実部が 0 より大きい複素数でも収束する。即ち $\text{Res} > 0$ なる複素平面上において定義出来る。この時 (6) を用いて $\text{Res} \leq 0$ の部分へ拡張して定義していける。このようにしてガンマ関数は全複素平面上で定義出来る（これを解析接続という）。(3) を繰り返し使うと $s = 0, -1, -2, -3, \dots$ が 1 位の pole であることが分かる。1 位の値は、

$$\Gamma(s+n+1) = (s+n)(s+n-1)\cdots(s+1)s\Gamma(s)\tag{7}$$

より $s = -n$ の時 $(-1)^n \frac{1}{n!}$ となる。

以上により無限積表示は

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = e^{as} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}\tag{8}$$

となる。ここで a は適当な数である。 a を求めるには $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{s\Gamma(s)} &= \frac{1}{s} e^{as-a} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s-1}{n}\right) e^{-\frac{s}{n} + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{s} e^{as-a} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{s+n}\right) e^{-\frac{s}{n} + \frac{1}{n}} \\ &= e^{as-a} \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \frac{(n-1) \left(1 + \frac{s}{n-1}\right)}{n \left(1 + \frac{s}{n}\right)} e^{-\frac{s}{n-1} + \frac{1}{n-1}} \\ &= e^{as-a} \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n-1}\right) e^{-\frac{s}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \ln(n-1) - \ln n} \\ &= e^{as-a} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}\end{aligned}\tag{9}$$

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n$ は収束し、これを γ と書き、オイラー数という。よって、

$$\frac{1}{s\Gamma(s)} = e^{as-a+\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \quad (10)$$

となる。これを (8) と比べれば $a = \gamma$ が分かる。即ち

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s \cdot e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \quad (11)$$

となる。

この無限積表示を使い、計算すれば

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \quad (12)$$

が得られる。

3 ベータ関数

$\alpha, \beta > 0$ に対して

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \quad (13)$$

をベータ関数という。積分変数を $x = \frac{y}{1+y}$ とすれば

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy \quad (14)$$

積分変数を $y = u^2$ とすれば

$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\infty} \frac{u^{2\alpha-1}}{(1+u^2)^{\alpha+\beta}} du \quad (15)$$

積分変数を $x = \cos^2 \theta$ とした時には

$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\alpha-1} \theta \sin^{2\beta-1} \theta d\theta \quad (16)$$

ベータ関数はガンマ関数を使って表される。

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \int_0^{\infty} y^{\beta-1} e^{-y} dy \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u^{2\alpha-1} v^{2\beta-1} e^{-(u^2+v^2)} du dv \quad (x = u^2, y = v^2) \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2(\alpha+\beta)-1} e^{-r^2} \cos^{2\alpha-1} \theta \sin^{2\beta-1} \theta dr d\theta \\ &\quad (u = r \cos \theta, v = r \sin \theta) \\ &= \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} dx \cdot B(\alpha, \beta) \quad (x = r^2) \\ &= \Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (17)$$

従って

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (18)$$

となる。

4 ベキ級数の係数の関数への拡張

ここではちょっと特殊なことをする。

まず $u = \frac{w}{1+w}$ 、 $w = \frac{u}{1-u}$ の関係があり、

$$a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + \cdots = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + b_4 w^4 + \cdots \quad (19)$$

の関係がある時 a_n と b_n の間には

$$\begin{aligned} b_n &= (-1)^{n-1} \left\{ a_1 - \frac{n-1}{1!} a_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} a_3 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} a_4 + \cdots \right\} \\ &= (-1)^{n-1} \left\{ a_1 + \frac{-n+1}{1!} a_2 + \frac{(-n+1)(-n+2)}{2!} a_3 + \frac{(-n+1)(-n+2)(-n+3)}{3!} a_4 + \cdots \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} a_n &= b_1 + \frac{n-1}{1!} b_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} b_3 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} b_4 + \cdots \\ &= b_1 - \frac{-n+1}{1!} b_2 + \frac{(-n+1)(-n+2)}{2!} b_3 - \frac{(-n+1)(-n+2)(-n+3)}{3!} b_4 + \cdots \end{aligned} \quad (21)$$

の関係がある。

次に関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{N!} x^N \quad (22)$$

と書いた時、

$$e^x f(-x) = g(x) \quad (23)$$

なる関係がある時

$$\begin{aligned} e^x f(-x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n!} x^n \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{x^N}{N!} \sum_{n+m=N} \frac{N!}{m!n!} (-1)^n a_n \end{aligned} \quad (24)$$

より

$$\begin{aligned} A_N &= a_0 - \frac{N}{1!} a_1 + \frac{N(N-1)}{2!} a_2 - \cdots \\ &= a_0 + \frac{-N}{1!} a_1 + \frac{-N(-N+1)}{2!} a_2 + \frac{-N(-N+1)(-N+2)}{3!} a_3 + \cdots \end{aligned} \quad (25)$$

従って $u = \frac{w}{1+w}$ 、 $w = \frac{u}{1-u}$ で

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^{n+1} \quad (26)$$

とした時

$$b_n = (-1)^n A_n \quad (27)$$

となるのが分かる。

以上の関係式を駆使して、自明でない様々な関数の関係式を導けるが、詳細は省く。

次に (19) をちょっと変形して $u = \frac{w}{1+w}$ 、 $w = \frac{u}{1-u}$ として

$$A(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n, \quad B(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n w^n \quad (28)$$

に対し、 $A(u) = B(w)$ なる関係がある時、 $0 < s < 1$ の時（係数が $\neq 0$ の最初の項により範囲は変わる）

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{B(w)}{w^{s+1}} dw &= \frac{\pi}{\sin \pi s} \left(a_1 + \frac{-s+1}{1!} a_2 + \frac{(-s+1)(-s+2)}{2!} a_3 + \dots \right) \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi s} b_s \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ここで b_s は右辺 1 段目のカッコの中で定義されたもの。 $s = n$ の時は (20) より $B(w)$ の係数 b_n に等しくなるのが分かる。即ちこれは b_n を関数として拡張したものといえる。これを全複素平面上へ解析接続することで、全複素数 s で定義出来る。

(22) の場合には $s > 0$ の時

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{s-1} g(-x) dx &= \Gamma(s) \left(a_0 + \frac{s}{1!} a_1 + \frac{s(s+1)}{2!} a_2 + \dots \right) \\ &= \Gamma(s) A_{-s} \end{aligned} \quad (30)$$

これも $g(x)$ の係数 A_n の関数としての拡張を与えている。これも全複素平面上へ解析接続すれば、全複素数上で定義出来る。上の 2 つの係数を与える積分の間には関係が容易に見てとれる。それを簡単に見れるようにまとめておく。

$$\begin{aligned} F(x) &= f(0) - \frac{f(1)}{1!} x + \frac{f(2)}{2!} x^2 - \frac{f(3)}{3!} x^3 + \dots \\ &= g(0) - g(1)x + g(2)x^2 - g(3)x^3 + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

と書いた時、上の 2 つの事項をまとめて書くと

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} F(x) dx = \frac{\pi}{\sin \pi s} g(-s) \quad (-1 < s < 0) \quad (32)$$

$$= \Gamma(s) f(-s) \quad (0 < s) \quad (33)$$

となり、 f と g の間には（全複素平面上へ解析接続したものとして）

$$g(s) = \frac{f(s)}{\Gamma(s+1)} \quad (34)$$

の関係が導かれる。

以上の事項を駆使すれば、さまざまな自明でない、興味深い結果がたくさん導かれるが、ここではとりあえず触れないでおく。

次に

$$G(x) = g(0) - \frac{g(1)}{1!} x + \frac{g(2)}{2!} x^2 - \dots \quad (35)$$

$$F(x) = f(0) - \frac{f(1)}{1!} x + \frac{f(2)}{2!} x^2 - \dots \quad (36)$$

とした時、 u, w は上と同じ関係であるとして

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} G(ux) F(wx) dx \\ &= \frac{1}{w} \left(g(0)f(-1) - g(1)f(-2) \left(\frac{u}{w} \right) + g(2)f(-3) \left(\frac{u}{w} \right)^2 - \dots \right) \end{aligned} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{u} \left(f(0)g(-1) - f(1)g(-2) \left(\frac{w}{u} \right) + f(2)g(-3) \left(\frac{w}{u} \right)^2 - \dots \right) \quad (38)$$

となり、特に $f(s) = 1$ とすれば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w} \left(g(0) - g(1) \left(\frac{u}{w} \right) + g(2) \left(\frac{u}{w} \right)^2 - \dots \right) \\ &= \frac{1}{u} \left(g(-1) - g(-2) \left(\frac{w}{u} \right) + g(-3) \left(\frac{w}{u} \right)^2 - \dots \right) \end{aligned} \quad (39)$$

従って $\frac{u}{w} = x$ と置けば

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} g(-n) \frac{1}{x^n} \quad (40)$$

が得られる。

次に

$$F(x) = f(0) - f(1)x + f(2)x^2 - \dots \quad (41)$$

とすると $0 < s < 1$ として

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{s-1} F(x) dx &= \int_0^1 x^{s-1} (f(0) - f(1)x + \dots) dx \\ &\quad + \int_1^{\infty} x^{s-1} \left(f(-1) \frac{1}{x} - f(-2) \frac{1}{x^2} + \dots \right) dx \\ &= f(0) \frac{1}{s} - f(1) \frac{1}{s+1} + f(2) \frac{1}{s+2} - \dots \\ &\quad - f(-1) \frac{1}{s-1} + f(-2) \frac{1}{s-2} - f(-3) \frac{1}{s-3} + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

となり、よって

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi s} f(-s) &= f(0) \frac{1}{s} - f(1) \frac{1}{s+1} + f(2) \frac{1}{s+2} - \dots \\ &\quad - f(-1) \frac{1}{s-1} + f(-2) \frac{1}{s-2} - f(-3) \frac{1}{s-3} + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

が得られる。特に $f = 1$ の時

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi s} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} + \dots \\ &\quad - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-3} + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

$$= \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2s}{s^2 - n^2} \quad (45)$$

を得る。 s を $\frac{s}{2} + \frac{1}{2}$ に置き換えて整理すれば

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi s}{2}} &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+5} - \frac{1}{s+7} + \dots \\ &\quad - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-5} + \frac{1}{s-7} - \dots \end{aligned} \quad (46)$$

$$= \sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{2l}{s^2 - l^2} \quad (47)$$

を得る。適当に変数変換すれば $\frac{1}{e^x - e^{-x}}$ 、 $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$ の表示も得られる。

5 関数の様々な表示

$\sin z$ 、 $\cos z$ の無限積表示

$$\cos z = \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi}\right)\cdots \quad (48)$$

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\pi}\right)\cdots \quad (49)$$

より、対数を取って微分して適当に変数変換などすれば

$$-\pi \tan \frac{\pi z}{2} = \frac{2}{z-1} + \frac{2}{z+1} + \frac{2}{z-3} + \frac{2}{z+3} + \frac{2}{z-5} + \frac{2}{z+5} \cdots \quad (50)$$

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+3} \cdots \quad (51)$$

$$\left(-\tan z = \frac{1}{z - \frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{z + \frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{z - \frac{3}{2}\pi} + \frac{1}{z + \frac{3}{2}\pi} + \cdots\right) \quad (52)$$

$$\left(\cot z = \frac{1}{z} + \frac{1}{z - \pi} + \frac{1}{z + \pi} + \frac{1}{z - 2\pi} + \frac{1}{z + 2\pi} + \cdots\right) \quad (53)$$

を得る。 $2iz = w$ として、適当に変形すれば

$$\frac{1}{e^w + 1} = \frac{1}{2} - \frac{2w}{w^2 + \pi^2} - \frac{2w}{w^2 + 9\pi^2} - \cdots - \frac{2w}{w^2 + (2n+1)^2\pi^2} - \cdots \quad (54)$$

$$\frac{1}{e^w - 1} = \frac{1}{w} - \frac{1}{2} + \frac{2w}{w^2 + 4\pi^2} + \frac{2w}{w^2 + 16\pi^2} + \cdots + \frac{2w}{w^2 + 4n^2\pi^2} + \cdots \quad (55)$$

$(-\pi \tan \frac{\pi z}{2}) = -\frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi z}{2}}$ 、及び $(\pi \cot \pi z) = \frac{-\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ より

$$\frac{\pi^2}{2 \cos^2 \frac{\pi z}{2}} = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{2}{(z-3)^2} + \frac{2}{(z+3)^2} + \frac{2}{(z-5)^2} + \frac{2}{(z+5)^2} + \cdots \quad (56)$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z-3)^2} + \frac{1}{(z+3)^2} + \cdots \quad (57)$$

6 ゼータ関数

ゼータ関数は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (58)$$

で定義される。

まず、この収束性を調べる。

1) ゼータ関数は $s > 1$ で収束する。これは $s > 1$ の時、 $[w]$ を w の整数部分であるとして、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{[w]} \frac{1}{n^s} &\leq 1 + \int_1^w \frac{dx}{x^s} \\ &= 1 + \frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{w^{s-1}}\right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{s-1} \end{aligned} \quad (59)$$

となり、 $w \rightarrow \infty$ で有限の値を取ることが分かる。

2) ゼータ関数は $s \leq 1$ で発散する。これは $s \leq 1$ の時

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{[w]} \frac{1}{n^s} &\geq \sum_{n=1}^{[w]} \frac{1}{n} \\ &> \int_1^w \frac{dx}{x} \\ &= \log w \end{aligned} \tag{60}$$

より $w \rightarrow \infty$ で発散する。

次にゼータ関数の $s \sim 1$ での振る舞いを調べる。これは $s > 1$ の時

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-1} &= \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \\ &< \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \\ &= \zeta(s) \\ &< 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \\ &= 1 + \frac{1}{s-1} \\ &< \frac{s}{s-1} \end{aligned} \tag{61}$$

となり、よって

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) &= 1 \\ \left(\zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + o\left(\frac{1}{s-1}\right) \right) \end{aligned} \tag{62}$$

となる。

ゼータ関数の積分表示は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx &= \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \end{aligned} \tag{63}$$

即ち

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \tag{64}$$

となる。(55) の表示を使えば、まず $s > 0$ として

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1)\zeta(s+1) &= \int_0^\infty \frac{x^s}{e^x - 1} dx \\
&= \int_0^\infty x^s \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2x}{4n^2\pi^2 + x^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^{s-1} - \frac{1}{2}x^s \right) dx + \int_1^\infty \left(x^{s-1} - \frac{1}{2}x^s \right) + \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{2x^{s+1}}{4n^2\pi^2 + x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+1)} + \int_1^\infty \left(x^{s-1} - \frac{1}{2}x^s \right) + \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{2x^{s+1}}{4n^2\pi^2 + x^2} \right) dx \tag{65}
\end{aligned}$$

ここで右辺の最後の等式の 2,3 番目の積分は、発散する積分の和により、発散が打ち消しあい、有限の値をとるのである。つまり、正確には ξ までの積分を取り、 $\xi \rightarrow \infty$ の極限を取っている。この積分を使って定義された関数は左辺により定義されているので、解析接続により $s < 0$ でも定義出来る。よって $s > 1$ として

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-s)\zeta(1-s) &= \frac{-1}{s} + \frac{1}{2(s-1)} \\
&\quad + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^{s+1}} - \frac{1}{2x^s} \right) dx + \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{2x^{1-s}}{4n^2\pi^2 + x^2} \right) dx \\
&= 2 \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{1-s}}{4n^2\pi^2 + x^2} \right) dx \\
&= 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n\pi)^s} \int_0^\infty \frac{w^{1-s}}{1+w^2} dw \quad (w = \frac{x}{2n\pi}) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n\pi)^s} \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{s}{2}}}{1+u} du \quad (u = w^2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^s} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi s}{2}} \zeta(s) \tag{66}
\end{aligned}$$

即ち s を $1-s$ に置き換えて、ゼータ関数の関数等式

$$\zeta(1-s) = \frac{2 \cos \frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s} \Gamma(s) \zeta(s) \tag{67}$$

を得る。ここでゼータ関数とベルヌーイ数との関係式

$$\zeta(2q) = \frac{2^{2q-1} B_q}{(2q)!} \pi^{2q} \tag{68}$$

を一般化して、関数としてのベルヌーイ数 B_s を

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s+1)} B_{\frac{s}{2}} \tag{69}$$

で定義する。ゼータ関数の関数等式より、ベルヌーイ数の関数等式、

$$B_{\frac{1-s}{2}} = \frac{(2\pi)^s (1-s)}{2 \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s+1)} B_{\frac{s}{2}} \tag{70}$$

及び

$$\zeta(1-s) = \frac{\cos \frac{\pi s}{2}}{s} B_{\frac{s}{2}} \tag{71}$$

を得る。関数等式を用いて、ゼータ関数の特殊値を簡単に計算出来る。結果だけ書くと $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ 、 $\zeta(-2n) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)、 $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ 、 $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$ 、 $\zeta(-5) = -\frac{1}{252}$ 、一般には、 $\zeta(-2n+1) = (-1)^n \frac{B_n}{2n}$ となる。

容易に確かめられるようにゼータ関数は、 p を素数であるとして

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \prod_{p:\text{prime}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}\end{aligned}\tag{72}$$

と書ける。ここで積は全ての素数 p にわたるものとする。

7 ゼータ関数に類似の関数

上記で定義したゼータ関数の他に

$$\xi(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots\tag{73}$$

$$\eta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots\tag{74}$$

$$\mu(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots\tag{75}$$

$$\tag{76}$$

などが定義出来る。順にグザイ関数、エータ関数、ミュー関数と呼ぶことにする。グザイ関数とエータ関数はゼータ関数で表せて

$$\xi(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s)\tag{77}$$

$$\eta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s)\tag{78}$$

となる。

ミュー関数の素数を使った無限積表示は

$$\mu(s) = \prod_{p_1, p_2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1^s}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2^s}\right)}\tag{79}$$

と書ける。ここで p_1 は $4n+1$ の形の素数、 p_2 は $4n+3$ の形の素数全てにわたる積である。

また、関数等式は $0 < s < 1$ とした時、

$$\begin{aligned}\mu(s)\Gamma(s) &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + e^{-x}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{l=1,3,5,\dots} \pm \frac{x^{s-1} l}{\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 + l^2} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \sum_{l=1,3,5,\dots} \pm \int_0^\infty \frac{w^{s-1} l}{w^2 + l^2} dw \quad (w = \frac{2x}{\pi}) \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \sum_{l=1,3,5,\dots} \pm \frac{1}{l^{1-s}} \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{u^2 + 1} du \quad (u = w^2) \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \frac{\mu(1-s)}{\sin \frac{\pi s}{2}}\end{aligned}\tag{80}$$

が得られる。解析接続により全複素平面上で成立する。この場合もオイラー数を一般的に関数として拡張して

$$\mu(s) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^s}{2\Gamma(s)} E_{\frac{s-1}{2}} \quad (81)$$

と定義する。オイラー数の関数等式

$$E_{-\frac{s}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^s}{\cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s)} E_{\frac{s-1}{2}} \quad (82)$$

及び

$$\mu(1-s) = \frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{2} E_{\frac{s-1}{2}} \quad (83)$$

が分かる。ミュー関数の特殊値は $\mu(0) = \frac{1}{2}$ 、 $\mu(1) = \frac{\pi}{4}$ 、 $\mu(-2n+1) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) などとなる。

8 特殊関数

ここでは次の2つの関数について調べる。

$$\phi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \sin x dx, \quad \psi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cos x dx \quad (84)$$

まず、これらの積分の収束性から調べる。 $\phi(s)$ は

$$\phi(s) = \int_0^1 x^{s-1} \sin x dx + \int_1^\infty x^{s-1} \sin x dx \quad (85)$$

と分ければ、第1項目は被積分関数が $x = 0$ の近傍で $\sim x^s$ のように振る舞うことから、 $s > -1$ で収束するのが分かる。第2項目は $s < 1$ の時、被積分関数が減衰しながら $+$ と $-$ の間を振動するので、積分が収束するのが分かる。よって $\phi(s)$ の積分は $-1 < s < 1$ で収束する。同様の考察により $\psi(s)$ の積分は $0 < s < 1$ で収束するのが分かる。

関数等式は部分積分を使えば容易に導かれる。 $\phi(s)$ は $-1 < s < 0$ の時

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \left[\sin x \frac{x^s}{s} \right]_0^1 + \left[\sin x \frac{x^s}{s} \right]_1^\infty - \psi(s+1) \frac{1}{s} \\ &= -\frac{1}{s} \psi(s+1) \end{aligned} \quad (86)$$

となるのが分かる。一方 $\psi(s)$ は、ちょっと考えないといけない。 $0 < s < 1$ として

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \left[\cos x \frac{x^s}{s} \right]_0^1 + \left[\cos x \frac{x^s}{s} \right]_1^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty x^s \sin x dx \\ &= \frac{1}{s} \cos 1 + \left[\cos x \frac{x^s}{s} \right]_1^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty x^s \sin x dx \end{aligned} \quad (87)$$

ここで右辺の第2項は $x \rightarrow \infty$ の極限の意味とする。また第3項も積分は0からある適当な有限の値までの積分を取り、その値が $\rightarrow \infty$ の極限を取ったものの意味であるとする。これらの極限操作のもと、2つの項から生じる発散が打ち消しあっている。これを $s < 0$ へ解析接続すれば、第2項も有限の値へ落ち着き、第1項と打ち消しあう。よって

$$\psi(s) = \frac{1}{s} \phi(s+1) \quad (88)$$

従って

$$\phi(s) = -\frac{1}{s(s+1)}\phi(s+2) \quad (89)$$

$$\psi(s) = -\frac{1}{s(s+1)}\psi(s+2) \quad (90)$$

が導かれる。

$\phi(s)$ は $s = 0$ で有限の値を取るので、関数等式により $\phi(2) = 0$ が分かる。よって関数等式から $\phi(2) = \phi(4) = \phi(6) = \dots = 0$ が分かる。よって (88) より $\psi(1) = \psi(3) = \psi(5) = \dots = 0$ が分かる。

また $\phi(s)$ は $s \rightarrow -1$ で発散するので、 $s = -1$ で pole になるのが分かる。もう少し正確に調べるなら、 $\phi(s)$ の発散が被積分関数の $x = 0$ の近傍から起きていることに注意して、 x が十分小さい時、 $\frac{x}{2} < \sin x < x$ となるので、 ξ を十分小さくとっておき、 $s > -1$ とした時、

$$\int_0^\xi \frac{x^s}{2} dx < \int_0^\xi x^{s-1} \sin x dx < \int_0^\xi x^s dx \quad (91)$$

左辺は

$$= \frac{\xi^{s+1}}{2(s+1)} = \frac{1}{2(s+1)} + \frac{\ln \xi}{2} + \mathcal{O}(s+1) \quad (92)$$

右辺は

$$= \frac{\xi^{s+1}}{s+1} = \frac{1}{s+1} + \ln \xi + \mathcal{O}(s+1) \quad (93)$$

となるので $s \rightarrow -1$ で 1 位の pole を持つことが分かる。後は関数等式から $\phi(s)$ は $s = -1, -3, -5, -7, \dots$ で 1 位の pole を持つことが分かる。同様に $\psi(s)$ は $s = 0, -2, -4, -6, \dots$ で 1 位の pole を持つ。ちなみに $\phi(s)$ の 1 位の値は、(91) で左辺に factor $\frac{1}{2}$ をかけたが、 ξ を十分小さく取っていれば、いくらでも 1 に近く取ることが出来るので $\lim_{s \rightarrow -1} (s+1)\phi(s) = 1$ が分かる。一般には $\lim_{s \rightarrow -l} (s+l)\phi(s) = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{1}{l!}$, ($l = 1, 3, 5, \dots$) となる。同様に $\lim_{s \rightarrow -2n} (s+2n)\psi(s) = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$, ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) となる。

以上から 0 点と pole が分かったので、無限積表示が得られる。結果を書くと

$$\phi(s) = \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}, \quad \psi(s) = \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \quad (94)$$

となる。