

減衰振動の3つの解と重解に現れる t

春巻

2026 年 8 月 2 日

減衰振動の運動方程式を特性方程式で解きます。解は減衰の強さによって3通りに分かれます。特に重解の場合だけ $te^{-\gamma t}$ が出てくるところを、2つの実数解の極限から確かめます。

1 運動方程式

質量 m 、ばね定数 k 、抵抗係数 c とすると、運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

です。ここで

$$\gamma = \frac{c}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とおくと、

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

となります。

$x = e^{\lambda t}$ を代入すると

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

なので、

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2)$$

を得ます。平方根の中の符号で場合分けします。

2 $\gamma > \omega_0$

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

とおけば、式 (2) は

$$\lambda = -\gamma \pm \alpha$$

となります。したがって

$$x(t) = Ae^{(-\gamma+\alpha)t} + Be^{(-\gamma-\alpha)t} \quad (3)$$

です。

$\alpha < \gamma$ なので 2 つの指数はどちらも負になり、振動せずに減衰します。

3 $\gamma = \omega_0$

この場合は

$$(\lambda + \gamma)^2 = 0$$

となり、 $\lambda = -\gamma$ が重解になります。

重解のときにもう 1 つの解が $te^{-\gamma t}$ になることを、式 (3) から確かめます。
定数を取り直すと

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(C \cosh \alpha t + D \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} \right)$$

と書けます。ここで

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \cosh \alpha t &= 1, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} &= t \end{aligned}$$

より、

$$x(t) = (C + Dt)e^{-\gamma t}$$

となります。

実際、 $x = te^{-\gamma t}$ とすると

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - \gamma t)e^{-\gamma t}, \\ \ddot{x} &= (-2\gamma + \gamma^2 t)e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

なので、 $\omega_0 = \gamma$ として式 (1) に代入すれば

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x &= \{(-2\gamma + \gamma^2 t) + 2\gamma(1 - \gamma t) + \gamma^2 t\} e^{-\gamma t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となります。

4 $\gamma < \omega_0$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

とおくと、

$$\lambda = -\gamma \pm i\Omega$$

です。実数の範囲で一般解を書くと

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

となります。

たとえば $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ とすると

$$\begin{aligned} A &= x_0, \\ B &= \frac{v_0 + \gamma x_0}{\Omega} \end{aligned}$$

なので、

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x_0 \cos \Omega t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\Omega} \sin \Omega t \right)$$

です。

5 まとめ

以上より、

$$\gamma > \omega_0 : \quad Ae^{(-\gamma+\alpha)t} + Be^{(-\gamma-\alpha)t},$$

$$\gamma = \omega_0 : \quad (C + Dt)e^{-\gamma t},$$

$$\gamma < \omega_0 : \quad e^{-\gamma t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

となりました。

特性方程式の判別式が正なら指数関数が2つ、0なら重解、負なら振動する解になります。特に臨界減衰の $te^{-\gamma t}$ は、過減衰の解で $\alpha \rightarrow 0$ とすると自然に出てきます。