

和積と積和の公式を、加法定理から作ってみました

りつ

2026 年 7 月 27 日

目 次

1	はじめに	1
2	その前に、 $\tan$ の加法定理	1
3	積和の公式を作りました	2
4	電卓で確かめました	3
5	和積の公式	3
6	名前と符号が覚えられません	4
7	合成もやってみました	4
8	分からなかったこと	5
	8.1 α がいつでもあるのか	5
	8.2 加法定理の証明	6
9	おわりに	6

1 はじめに

前回、加法定理から 2 倍角と半角までやりました。その続きで参考書を読み進めています。

次に出てきたのが、和積の公式と積和の公式でした。4 つずつあって、どれも似た形で、符号だけが違います。最初に見たときは、これは覚えられないと思いました。

ただ、前回 2 倍角と半角が加法定理から出てきたので、これも同じように出せるのではないかと、やってみました。

2 その前に、tan の加法定理

今回は sin と cos の加法定理だけ書いて、tan を書いていませんでした。参考書には同じページに載っていたのに飛ばしていたので、先にやっておきます。

tan は sin を cos で割ったものなので、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \quad (1)$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \quad (\text{加法定理より}) \quad (2)$$

です。

これだとまだ tan の式になっていません。tan にするには sin を cos で割った形がほしいので、分母と分子を $\cos \alpha \cos \beta$ で割ってみました。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \quad (3)$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (4)$$

参考書に載っているものと同じ形になりました。

分母に引き算が出てくるのが変だと思っていたのですが、 $\cos(\alpha + \beta)$ のほうの引き算が、割ったあともそのまま残っているだけでした。

15° でも試してみます。

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) \quad (5)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \quad (6)$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (7)$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \quad (8)$$

$$= 2 - \sqrt{3} \quad (9)$$

電卓で確かめると $2 - \sqrt{3} = 0.26794 \dots$ 、 $\tan 15^\circ = 0.26794 \dots$ で合っていました。

前回出した $\sin 15^\circ$ と $\cos 15^\circ$ を割っても同じ値になります。

3 積和の公式を作りました

sin の加法定理を 2 つ並べます。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (10)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (11)$$

この2つを足すと、右辺の後ろが消えます。

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad (12)$$

なので

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \quad (13)$$

です。引くほうもやると

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \quad (14)$$

になりました。

$\cos$ のほうも同じようにします。

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (15)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (16)$$

足すと

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \quad (17)$$

です。引くほうは、今度は下の式から上の式を引きます。

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \} \quad (18)$$

となりました。

これだけ引く順番が逆です。 $\sin \alpha \sin \beta$ に $-$ が付いているからなのですが、書いている途中で何回か間違えました。

4 電卓で確かめました

$\alpha = 45^\circ$ 、 $\beta = 30^\circ$ を (13) に代入して確かめました。

	値
$\sin 45^\circ \cos 30^\circ$	$0.61237 \dots$
$\frac{1}{2}(\sin 75^\circ + \sin 15^\circ)$	$0.61237 \dots$

合っていました。

前回出した $\sin 15^\circ$ と $\sin 75^\circ$ がここで出てくるとは思っていませんでした。

5 和積の公式

積和は、積の形を和の形にする式でした。逆に、和の形を積の形にするのが和積らしいです。
さっき作った

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad (19)$$

の左辺が、もう和の形になっています。そこで $\alpha + \beta$ と $\alpha - \beta$ に名前を付けます。

$$A = \alpha + \beta, \quad B = \alpha - \beta \quad (20)$$

とおくと、足して2で割れば α 、引いて2で割れば β が出ます。

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2} \quad (21)$$

これを入れると

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (22)$$

になりました。同じやり方で残りもやると

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (23)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (24)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (25)$$

です。

最後だけ $-$ が付きます。これも、さっき引く順番が逆だったところから来ています。

$A = 75^\circ$ 、 $B = 15^\circ$ で確かめました。

	値
$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$	1.22474...
$2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ$	1.22474...

6 名前と符号が覚えられません

ここまで全部自分で作れたのに、参考書の問題をやると毎回止まります。
止まるのは次の3つです。

- 「和積」と「積和」のどちらがどちらか分からなくなる
- $\cos A - \cos B$ の $-$ を忘れる
- $\sin \alpha \sin \beta$ の引く順番を逆にする

名前のほうは、和積は和を積にする、積和は積を和にする、と読めばいいと気づきました。そう書いてあるとおりでした。

符号のほうは、毎回作り直せば出るのですが、問題を解いている途中で作り直すと、元の問題が何だったか分からなくなります。なので、ここは覚えることにしました。

自分で作れる式を覚えるというのは変な感じがしますが、今のところそうしています。

7 合成もやってみました

参考書の次のページに、合成というのがありました。

$$a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha) \quad (26)$$

の形にする、と書いてあります。

これも加法定理を逆に見ればよさそうだと思って、右辺を開いてみました。

$$r \sin(\theta + \alpha) = r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha \quad (\text{加法定理より}) \quad (27)$$

左辺と見比べると

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha \quad (28)$$

であればよいことになります。2乗して足すと

$$a^2 + b^2 = r^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \quad (29)$$

$$= r^2 \quad (30)$$

なので

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (31)$$

です。

実際にやってみます。 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ だと

$$r = \sqrt{1 + 3} = 2 \quad (32)$$

で、

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (33)$$

なので $\alpha = 60^\circ$ です。つまり

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin(\theta + 60^\circ) \quad (34)$$

となりました。

$\theta = 30^\circ$ を入れて確かめると、左辺は

$$\sin 30^\circ + \sqrt{3} \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (35)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \quad (36)$$

$$= 2 \quad (37)$$

で、右辺は $2 \sin 90^\circ = 2$ です。合っていました。

足し算だったものが $\sin$ ひとつになるのが、まだ少し変な感じがします。

8 分からなかったこと

8.1 α がいつでもあるのか

合成のところで、 $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ 、 $\sin \alpha = \frac{b}{r}$ になる α を持ってくる、と書いてありました。

例のときは 60° ですぐ見つかったのですが、 a と b は問題ごとに変わるので、そんな都合のいい α がいつでもあるのかが分かりませんでした。

たとえば $a = 2$ 、 $b = 3$ でやってみると $r = \sqrt{13}$ で、

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad (38)$$

になります。電卓で角度を出すと 56.3° くらいでしたが、これは知っている角ではありません。

角としては存在すると思うのですが、値がきれいに出不いので、それで合成したことになるのかが分かりませんでした。

8.2 加法定理の証明

前回書いた、加法定理そのものの証明はまだ読めていません。2 学期に授業でやると思うので、そのときにします。

9 おわりに

公式が増えていくのが嫌だったのですが、今のところ全部加法定理から出ています。前回の 2 倍角と半角も、今回の積和と和積と合成も、やっていることは足したり引いたり置きかえたりだけでした。

それなのに問題では符号を間違えるので、そこが不思議です。

自分用のまとめですが、置いておきます。間違っているところがあれば教えてください。