複素解析のお話

TKG

2025年3月3日

目次

1 INTRODUCTION	1	13.4 積分定理	6
2 複素数	1	13.5 位数の和を積分で表すこと	6
3 複素関数	1	13.6 有理型関数の表示の例 1	6
4 極限	2	13.7 有理型関数の表示例 2	7
4.1 数列の極限	2	13.8 具体的な例	7
5 関数の連続性	2	13.9 ベルヌーイ数を使った表示	8
6 微分	2	13.10 オイラー数を使った表示	8
6.1 微分、正則性	2		
6.2 コーシー・リーマンの条件	2		
7 指数関数等	2		
7.1 指数、三角関数	2		
7.2 対数関数	2		
7.3 一般の冪	3		
8 積分	3		
9 曲線に沿った積分	3		
9.1 例 1: $f = \frac{c}{z}$	3		
9.2 例 2: 正則な関数	4		
10 コーシーの積分定理	4		
11 正則関数の性質	4		
11.1 積分が積分経路に因らないこと	4		
11.2 コーシーの積分定理の拡張	4		
11.3 テイラー展開	4		
11.4 最大値の原理	5		
11.5 リュウビルの定理	5		
12 特異点	5		
13 有理型関数	5		
13.1 冪級数の正則性、一致性	5		
13.2 有理型関数	5		
13.3 位数	6		

1 INTRODUCTION

ここでは簡単な複素解析の基礎のお話をする。多少実解析についての知識があることを前提とするが、必ずしも必要ではないかもしれない。解析学はその考察の範囲を複素数にまで及んだときにこそ美しいと思う。その調和のとれた複素解析の世界の少しにでも触れられればと思う。

2 複素数

複素数 z は実数 x, y を用いて $z = x + iy$ と書ける。 z に共役な複素数は $z^* = x - iy$ と定義される。 x と y は z, z^* を使って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表せる。

3 複素関数

まず、ある（一般にはいくつかの、実または複素の）変数から複素数への、どんな複素関数 f も、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix} \quad (2)$$

として u, v を定義すると、これらは実関数であり、 f は

$$f = u + iv \quad (3)$$

と書ける。 u を Ref 、 v を Imf と書く。

4 極限

4.1 数列の極限

複素数の数列 $\alpha_n = a_n + ib_n$ ($a_n, b_n \in \mathbf{R}$) が $\alpha = a + ib$ に収束するとする。

$$\alpha_n - \alpha = (a_n - a) + i(b_n - b) \quad (4)$$

なので、

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \rightarrow a \\ b_n \rightarrow b \end{cases} \quad (5)$$

である。

5 関数の連続性

実または複素の変数 z に対し、複素関数 $f = u + iv$ が $z = z_0$ で連続であることも、 $z \rightarrow z_0$ で

$$f(z) \rightarrow f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} u(z) \rightarrow u(z_0) \\ v(z) \rightarrow v(z_0) \end{cases} \quad (6)$$

である。

6 微分

6.1 微分、正則性

複素変数 z の関数 $f(z)$ に対し、 $z \rightarrow z_0$ で

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad (7)$$

である時、 f は $z = z_0$ で微分可能であるという。この時

$$\alpha =: \frac{df}{dz}(z_0) \quad (8)$$

と書く。

さらに、 f が $z = z_0$ のある近傍内の全ての点で微分可能であるとき、 f は $z = z_0$ で正則であるという。

6.2 コーシー・リーマンの条件

(1) より、

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (10)$$

が分かる。

この時、関数 $f(z, z^*) = u + iv$ が微分可能であることは、 f が z^* に依存しない、即ち

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0 \quad (11)$$

に等しい。これを (10) を使って表すと、コーシー・リーマンの条件になる。

7 指数関数等

7.1 指数、三角関数

指数関数を

$$\begin{aligned} \exp z &:= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \quad (12)$$

で定義する。また、三角関数を

$$\begin{aligned} \cos z &:= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \\ &= \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{\pm z^k}{k!} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sin z &:= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \\ &= \sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\pm z^l}{l!} \end{aligned} \quad (14)$$

で定義する。

これらの良く知られた性質は直接の計算で容易に求まる。

例えば、

$$\begin{aligned} \exp z \cdot \exp w &= \sum_n \frac{z^n}{n!} \sum_m \frac{w^m}{m!} \\ &= \sum_{n,m} \frac{z^n w^m}{n! m!} \\ &= \sum_N \frac{1}{N!} \sum_{n+m=N} \frac{N!}{n! m!} z^n w^m \\ &= \sum_N \frac{1}{N!} (z + w)^N \\ &= \exp[z + w] \end{aligned} \quad (15)$$

など。

7.2 対数関数

$z = r \exp(i\theta)$ ($r, \theta \in \mathbf{R}, r > 0$) と書いた時、適当な実数 a をとり、 θ を $a \leq \theta \leq a + 2\pi$ に限った時、 z と r, θ の組は 1 対 1 に対応する。この時、明らかに $r = \exp \ln |z|$ なので、

$$z = \exp(\ln |z| + i\theta) \quad (16)$$

と書くことが出来る。この時

$$\log z := \ln |z| + i\theta \quad (17)$$

を対数関数という。特に、 θ の取る範囲を $\theta = 0$ を含む範囲に取っている場合、 $\log$ は主値に取ってあるといい、これ

を（実変数の時の $\ln$ を拡張して） $\ln$ と書く。明らかに任意に対数 $\log$ を取った時、

$$\log z = \ln z + i2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (18)$$

の形で書ける。

7.3 一般の冪

一般に a^z ($a, z \in \mathbb{C}$) を、（適当に $\log$ を決めて）

$$\begin{aligned} a^z &:= \exp(z \log a) \\ &= \exp[z(\ln a + i2n\pi)] \\ &= \exp(z \ln a) \exp(i2n\pi z). \end{aligned} \quad (19)$$

特に $z = m \in \mathbb{Z}$ であれば、これは a^m に等しくなり、 a の冪の拡張になっている。

この a^z の定義は、当然 $\log$ をどう取ったかによって変わるが、 $z = m \in \mathbb{Z}$ の時は、どれも一致する。

以下では、特に断らない限り、 a^z を主値の $\log$ で定義する。即ち

$$a^z = \exp(z \ln a) \quad (20)$$

とする。よって

$$e^z = \exp z \quad (21)$$

である。

8 積分

実数 $t \in [a, b]$ の複素関数 $f(t) = u(t) + iv(t)$ に対し、区間 $[a, b]$ を n 個の区間に分割し、 i 番目の区間の中の任意の点を t_i 、その区間の間隔を Δt_i とすると、

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i = \sum_{i=1}^n u(t_i) \Delta t_i + i \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t_i \quad (22)$$

より、 u, v が区間 $[a, b]$ で積分可能であれば f も積分可能である。この時上式の極限值を

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt \quad (23)$$

と書く。

9 曲線に沿った積分

実変数 $t \in [a, b]$ の複素関数 $z = z(t)$ は、 t が a から b へ動くとき、 $z(a)$ から $z(b)$ へ動く。この時 z の動いた軌跡を C と書き、簡単に曲線という。

この時、複素関数 $f(z)$ に対して、

$$\int_a^b f(z) \frac{dz}{dt} dt =: \int_C f(z) dz \quad (24)$$

を f の曲線 C に沿った積分という。

これは、次のようにして、実関数と同様、直接定義できる。即ち、曲線 C を n 個の区間 $[w_i, w_i + \Delta z_i]$ ($w_{i+1} = w_i + \Delta z_i$) に分割し、その i 番目の区間内の任意の点を z_i とする。 $n \rightarrow \infty$ の時、 $\max\{|\Delta z_i| : i = 1, 2, \dots, n\} \rightarrow 0$ であるとして、

$$\sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta z_i \quad (25)$$

が収束する時、これを

$$\int_C f(z) dz \quad (26)$$

と書く。この定義の下で、実関数の積分と同様、 f が正則である領域内に曲線 C をとれば、微分の積分がもとに戻ること、積分の微分がもとに戻ること、また、 $z = g(w)$ があり、これも正則であるとすれば

$$\int_C f(z) dz = \int_C f(z) \frac{dg}{dw}(w) dw \quad (27)$$

となることなどが分かる。ただし、 C は g で C に移るとする。上の (24) の定義は、この特殊な場合といえる。

特に、曲線 C が閉曲線の場合、

$$\oint_C f(z) dz \quad (28)$$

と書く。

9.1 例 1: $f = \frac{c}{z}$

$f(z) = \frac{c}{z}$ (c は定数) の場合、 $z = r_t e^{i\theta_t}$ ($z \neq 0$ for $\forall t$) と書くと、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{|z|}{|z|} z + i\dot{\theta} z \\ &= z \frac{d}{dt} (\ln |z| + i\theta) \end{aligned} \quad (29)$$

より、

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= c \int_a^b dt \frac{d}{dt} (\ln |z| + i\theta) \\ &= c \left[\ln |z| + i\theta \right]_a^b. \end{aligned} \quad (30)$$

従って、 $t = a, b$ において、 $|z(a)| = |z(b)|$ であるとすると、

$$= ic (\theta(b) - \theta(a)). \quad (31)$$

9.2 例 2: 正則な関数

複素平面内の、半径が R の円盤 (内部、境界を含む) の領域 D 内の至るところで正則な関数 $f(z)$ に対して、閉曲線 $C \subset D$ に沿った f の積分

$$\oint_C f(z) dz \quad (32)$$

を考える。

まず、 C に囲まれた領域を N 個の領域 D_i ($i = 1, \dots, N$) に分割する。その各々の領域 D_i は、半径が r_i ($\sim \frac{R}{\sqrt{N}}$ 程度) の円内に含むことが出来るとする。 D_i の境界を C_i とする。この時

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} f(z) dz. \quad (33)$$

この時、 C_i 内の任意の点 z_i をとると、 $\Delta_i := z - z_i$ として、

$$\oint_{C_i} f(z) dz = \oint_{C_i} \left[f(z_i) + \alpha(\Delta_i) + o(|\Delta_i|) \right] dz. \quad (34)$$

ここで、右辺の $[\dots]$ の中の第 1 項、第 2 項の積分は 0 になる。第 3 項は、曲線 C_i を、適当なパラメータ $t \in [a, b]$ で表して、

$$\oint_{C_i} o(|\Delta_i|) dz = o\left(\int_a^b |\Delta_i| \left| \frac{dz}{dt} \right| dt\right). \quad (35)$$

さらに、 $|\Delta_i| \leq 2r_i \sim \frac{R}{\sqrt{N}}$ 及び、 $\left| \frac{dz}{dt} \right|$ を $\sim r_i$ 程度に取れば (これは可能である)、

$$\begin{aligned} &= o(r_i^2) \\ &= o\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \sum_{i=1}^N o\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= o(1) \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (36)$$

従って、 f が領域 $D(\supset C)$ の至るところで正則である時、

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (37)$$

10 コーシーの積分定理

前章の例 1, 2 を応用して、次のことを証明することは容易であろう。

閉曲線 C に囲まれた領域内の至るところで正則な関数 $f(z)$ に対し、その領域内の任意の点 z_0 に対し、

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (38)$$

となる。これをコーシーの積分定理という。

11 正則関数の性質

簡単のため、以下では $f(z)$ が至るところ正則であると

11.1 積分が積分経路に因らないこと

z_0 と z_1 を結ぶ 2 つの曲線 C_1, C_2 に対して、 f の積分

$$\int_{C_1} f dz, \int_{C_2} f dz \quad (39)$$

に対し、これらの差は曲線 C_1, C_2 からなる閉曲線に沿った積分になるので、それは 0。即ち、上の 2 つは等しい。

11.2 コーシーの積分定理の拡張

f は正則なので微分可能。

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz}(\alpha) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i h} \oint \left(\frac{1}{z - \alpha - h} - \frac{1}{z - \alpha} \right) f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint \frac{f(z)}{(z - \alpha - h)(z - \alpha)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - \alpha)^2} dz \end{aligned} \quad (40)$$

ここに、積分経路は α を内側に含むようなものとする。また、最後の等式は $\left| \frac{f(\alpha)}{(z - \alpha)^n} \right|$ が積分経路上で有界であることから、極限と積分が交換できる。

さらに、同様の変形をしていくと、実は f は何回でも微分可能であり、一般に

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz \quad (41)$$

となることが証明できる。

11.3 テイラー展開

コーシーの積分定理から、

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad (42)$$

ここで、閉曲線 C は、 $z \in C$ が常に $|z| > |a|$ であるように取る。従って、

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} f^{(n)}(0) \end{aligned} \quad (43)$$

となり、テイラー展開が導かれる。また、証明から、一般的に f が至るところ正則でないとしても、その内側で f が正則であるような円形の領域内では、テイラー展開が出来ることが分かる。その円形の領域の半径として取れるものの上限を収束半径という。 f が有限の収束半径を持つ場合、その円周上に少なくとも 1 点、 f が正則でない点がないといけない。もしそうでないと、さらにその半径より大きい円が取れることになってしまうからである。

11.4 最大値の原理

$f(z)$ が領域 D 内で正則であるとする。 $a \in D$ として、曲線 C を $z = a + re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) にとる。

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) d\theta \end{aligned} \quad (44)$$

即ち、 $f(a)$ は a のまわりの曲線 C の平均値となる。従って点 a で $|f(a)|$ が極大値をとるとすると、曲線 C の半径 r を十分に小さくとれば常に $|f(a)| > |f(z)|$ ($z \in C$) であるようにとれる。この時、

$$\begin{aligned} |f(a)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta \\ &< |f(a)| \end{aligned} \quad (45)$$

となるため矛盾してしまう。従って $|f(z)|$ は点 a では極大値となりえない。 a は任意なので D の内部で $|f(z)|$ が極大値をとらないことがわかる。

$f(a) = u(a) + iv(a)$ と実部と虚部にわけた時、実部と虚部のそれぞれに対しても (44) より曲線 C 上の平均値となることがわかる。実部 $u(z)$ が点 a で極大値をとるとすると、同様に

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z) d\theta \\ &< u(a) \end{aligned} \quad (46)$$

となり矛盾する。従って実部も D の内部で極大値をとらない。同様に極小値をとることもないことはすぐにわかる。また、虚部の $v(z)$ に対しても同様に議論できる。従って D の内部で実部および虚部が極大、極小をとることがないことがわかる。

逆に $|f(z)|$ が a で極小値を持つとき、かつ $|f(a)| \neq 0$ であるとする。この時、 $\frac{1}{f(z)}$ は a の十分小さな近傍でたしかに正則であるが、 a で $\frac{1}{|f(z)|}$ が極大値を持つことになり矛盾。従って $|f(a)|$ が極小値であるならば $f(a) = 0$ である。

11.5 リュウビルの定理

複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数 (整関数という) を $f(z)$ とする。今、 $|f(z)|$ が有界である、即ちある定数 $C > 0$ があり、任意の $z \in \mathbb{C}$ で $|f(z)| < C$ である時、曲線 C を $z = a + Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) ととると、(41) より

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \\ &= \frac{n!}{2\pi R^n} \left| \int_0^{2\pi} f(z) d\theta \right| \\ &< \frac{n! \cdot C}{2\pi R^n} \end{aligned} \quad (47)$$

従って、 $R \rightarrow \infty$ の極限をとると右辺は $\rightarrow 0$ 、一方左辺は定数なので結局 $f^{(n)}(a) = 0$ 。即ち $f(z)$ は定数となる。これをリュウビルの定理という。

12 特異点

関数 $f(z)$ が $z = a$ で正則でない場合、 f は $z = a$ で特異点を持つという。

f が $z = a$ の近傍で $f \sim \frac{c}{(z-a)^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) のように振る舞っている時 ($z = a$ を除いて、近傍内で正則であるとする)、 f は $z = a$ で n 位の pole を持つという。この時、 f は $z = a$ で正則でないので、特異点である。

f が $z \rightarrow a$ で $f \rightarrow \infty$ である時、 f はそこに特異点を持つ。この時、上のようには書けない時、つまり $z \rightarrow a$ で $(z-a)^n f(z) \rightarrow \infty$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) である時、真性特異点という。

13 有理型関数

13.1 冪級数の正則性、一緻性

冪級数は、その収束円内において正則である (前述)。また、そこで実関数の時と同じで、一致の定理が成立する。

13.2 有理型関数

関数 $f(z)$ が至るところで、正則であるか pole であるかのいずれかである時、 f は有理型であるという。

有理型関数 f は、どんな有限な領域をとっても、その中には有限個の pole しか存在しない。もし無限にあれば集積点 a を持ち、それも正則点ではない。さらに、そこではどんな近傍を取っても a 以外の特異点を含むので a は pole ではないことになる。

13.3 位数

一般に関数 f が $z = a$ で

$$f = \frac{c}{(z-a)^n} + \dots \quad (48)$$

($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) と書ける時、 a は n 位の点という。

特に n が負の場合には a は $-n$ 位の 0 点であるともいう。

13.4 積分定理

有理型関数 f が $z = a$ で n 位の特異点を持つとする。この時、 f が $z = a$ の近傍で

$$f = \frac{c_n}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_1}{z-a} + \dots \quad (49)$$

と書ける時、(41) より

$$\oint f(z) dz = 2\pi i c_1 \quad (50)$$

となる。ただし、積分は a を囲み、それ以外の pole を囲まないものとする。

c_1 を点 a の 1 位の値と呼ぶことにする。コーシーの積分定理は結局、有理型関数に対してそれを閉曲線上で積分すれば、その閉曲線内の全ての pole の 1 位の値を拾ってくるといえる。

13.5 位数の和を積分で表すこと。

有理型関数 f が $z \sim a$ で (48) のように書ける時、 $z \sim a$ で

$$\frac{f(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-a} + \dots \quad (51)$$

と書ける ($f = \frac{df}{dz}$)。よって、 $z = a$ の pole のみを囲む積分に対し、

$$\oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i n \quad (52)$$

となる。

このことは明らかに、(48) で n が負であっても成立する (即ち $z = a$ が 0 点である場合)。従って任意の閉曲線 C に対し、

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i \sum [\text{order}] \quad (53)$$

となる。ただし、和は C で囲まれた領域内の位数の和である。

13.6 有理型関数の表示の例 1

有理型関数 $\varphi(z)$ が $z = 0$ で正則であるとする。 φ の pole を ρ で表し、その位数を n_ρ 、1 位の値を c_ρ とする。この時、

$$\oint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = 2\pi i \left[\frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(0) + \sum \frac{c_\rho}{\rho^{n+1}} \right] \quad (54)$$

となる。和は積分で囲まれる領域内の全ての φ の pole、 ρ にわたる。

ここで $L_\rho(z)$ を

$$L_\rho(z) := \log\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) + \frac{z}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\rho}\right)^k \quad (55)$$

とすると (k は後で決める)、これを z で微分すれば、

$$\begin{aligned} \dot{L}_\rho(z) &= - \left[\frac{1}{\rho-z} - \frac{1}{\rho} - \frac{z}{\rho^2} - \dots - \frac{z^{k-1}}{\rho^k} \right] \\ &= - \left(\frac{z}{\rho}\right)^k \frac{1}{\rho-z} \end{aligned} \quad (56)$$

となる。また、同様の変形を行うと

$$\begin{aligned} \oint \frac{z^k \varphi(\zeta)}{\zeta^k (\zeta-z)} d\zeta &= \oint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \oint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta - z \oint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \\ &\quad - z^2 \oint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^3} d\zeta - \dots - z^{k-1} \oint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^k} d\zeta \\ &= 2\pi i \left[\varphi(z) + \sum \frac{c_\rho}{\rho-z} - \left(\varphi(0) + \sum \frac{c_\rho}{\rho} \right) \right. \\ &\quad \left. - z \left(\frac{\dot{\varphi}(0)}{1!} + \sum \frac{c_\rho}{\rho^2} \right) - z^2 \left(\frac{\ddot{\varphi}(0)}{2!} - \sum \frac{c_\rho}{\rho^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \dots - z^{k-1} \left(\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \sum \frac{c_\rho}{\rho^k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

よって、もしこの式の左辺が積分の領域が全複素平面を囲むような極限で $\rightarrow 0$ であるならば¹、

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= - \sum \frac{c_\rho}{\rho-z} + \left(\varphi(0) + \sum \frac{c_\rho}{\rho} \right) + z \left(\frac{\dot{\varphi}(0)}{1!} + \sum \frac{c_\rho}{\rho^2} \right) \\ &\quad + z^2 \left(\frac{\ddot{\varphi}(0)}{2!} + \sum \frac{c_\rho}{\rho^3} \right) + \dots + z^{k-1} \left(\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \sum \frac{c_\rho}{\rho^k} \right) \\ &= \left[\varphi(0) + \frac{z}{1!} \dot{\varphi}(0) + \frac{z^2}{2!} \ddot{\varphi}(0) + \dots + \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k-1)}(0) \right] \\ &\quad + \sum c_\rho \dot{L}_\rho(z) \end{aligned} \quad (58)$$

と書ける。上式の最後の等式の右辺の 1 段目の多項式を $\theta(z)$ と置き、

$$\dot{L}_\rho(z) = - \left[\frac{z^k}{\rho^{k+1}} + \frac{z^{k+1}}{\rho^{k+2}} + \frac{z^{k+2}}{\rho^{k+3}} + \dots \right] \quad (59)$$

¹例えば、積分の領域が半径 R の円で囲まれるような時、 $R \rightarrow \infty$ で

$$|\varphi| = o(R^k)$$

であれば、左辺は 0 になる。

と書けることより

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \theta(z) + \sum c_\rho \dot{L}_\rho(z) \\ &= \theta(z) + \sum \left(\frac{z}{\rho}\right)^k \frac{c_\rho}{z-\rho} \\ &= \theta(z) - z^k \sum_\rho \frac{c_\rho}{\rho^{k+1}} - z^{k+1} \sum_\rho \frac{c_\rho}{\rho^{k+2}} - z^{k+2} \sum_\rho \frac{c_\rho}{\rho^{k+3}} + \dots\end{aligned}\quad (60)$$

となる (k はここに現れる級数が収束するような最少のものとして決めるのである)。ここで

$$\zeta_\varphi(s) := \sum_\rho \frac{c_\rho}{\rho^s} \quad (61)$$

と置くと、

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \theta(z) - z^k \zeta_\varphi(k+1) - z^{k+1} \zeta_\varphi(k+2) \\ &\quad - z^{k+2} \zeta_\varphi(k+3) - \dots \\ &= \theta(z) - \sum_{n=k}^{\infty} z^n \zeta_\varphi(n+1)\end{aligned}\quad (62)$$

となる。

13.7 有理型関数の表示例 2

今度は有理型関数 $f(z)$ が $z=0$ で有限の値を持ち、 $f(0) \neq 0$ とする。この時、

$$\varphi(z) := \frac{\dot{f}(z)}{f(z)} \quad (63)$$

はまた有理型で、 f の 0 点または pole において、それを ρ とし、位数を $-n_\rho$ とすると、 φ は点 ρ で 1 位の pole で、その 1 位の値は n_ρ となるのが分かる。よってこれを z で $0 \sim z$ で積分すると

$$\log \left[\frac{f(z)}{f(0)} \right] = \int_0^z \theta(z) dz + \sum_\rho n_\rho L_\rho(z). \quad (64)$$

よって、

$$\begin{aligned}f(z) &= f(0) e^{\int_0^z \theta(z) dz} \prod_\rho \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \left(\frac{z}{\rho}\right)^m} \right]^{n_\rho} \\ &= f(0) \exp \left[\int_0^z \theta(z) dz - \frac{z^{k+1}}{k+1} \zeta_\varphi(k+1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z^{k+2}}{k+2} \zeta_\varphi(k+2) - \frac{z^{k+3}}{k+3} \zeta_\varphi(k+3) - \dots \right].\end{aligned}\quad (65)$$

ここで

$$\zeta_\varphi(s) := \sum_\rho \frac{n_\rho}{\rho^s} \quad (66)$$

である。(65) の右辺の最初の段の表示を無限積表示という。

13.8 具体的な例

前節での計算をいくつかの具体例で見てみる。まず $f(z) = \cos(z)$ の場合、 $\varphi(z) = -\tan z$ である。必要なのは (57) の左辺が 0 になるかどうかの評価である。 $z = \alpha + i\beta$ と置けば

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ &= i \frac{e^{-\beta+i\alpha} - e^{\beta-i\alpha}}{e^{-\beta+i\alpha} + e^{\beta-i\alpha}}\end{aligned}$$

よって

$$|\varphi(z)| \leq \left| \frac{e^{-\beta} + e^\beta}{e^{-\beta} - e^\beta} \right|$$

となるが、これは $\beta \rightarrow \infty$ で $\mathcal{O}(1)$ である。よって無限積表示が成立する。 $\varphi(z) = -\tan(z)$ の pole は $(n + \frac{1}{2})\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) であり、それらは全て 1 位の pole で 1 位の値は 1 である。よって

$$\begin{aligned}\cos z &= \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(n + \frac{1}{2})\pi}\right) e^{\frac{z}{(n + \frac{1}{2})\pi}} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}\right)\end{aligned}\quad (67)$$

となる。また (62)、(66) の表示より

$$\tan z = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (68)$$

とすれば、係数は $c_0 = 0$ で $k \geq 1$ では

$$c_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^{k+1}} \left(\frac{1}{(n + \frac{1}{2})^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(n + \frac{1}{2})^{k+1}} \right) \quad (69)$$

よって $c_{2q} = 0$ ($q \geq 1$)、

$$\begin{aligned}c_{2q-1} &= \frac{2}{\pi^{2q}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^{2q}} \\ &= 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2q} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{2q}}\end{aligned}\quad (70)$$

(ここで l は正の奇数 $l = 1, 3, 5, 7, \dots$ 全てにわたる) となる。

次に $f(z) = \sin z$ の場合、 $\varphi(z) = \frac{\cos z}{\sin z} = \cot z$ である。この時は φ が $z=0$ でも pole を持つが、ちょっと修正すれば前節のことが成り立つ。(57) では $k=1$ まででよい。(57) の左辺の評価は $\cos z$ の時とほぼ同様で 0 になる。よって

$$\oint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (71)$$

左辺の被積分関数は $\zeta = z, 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ で 1 位の pole を持ち、右辺の被積分関数は $\zeta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ で 1 位の pole を持つ。

$$\varphi(z) = \cot z = \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \dots \quad (72)$$

と置けば、(71) より

$$\left(\varphi(z) - \frac{1}{z} + \sum \left(\frac{1}{\rho-z} - \frac{1}{\rho}\right) - c_0\right) = 0 \quad (73)$$

よって

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} + c_0 + \sum \dot{L}_\rho(z) \quad (74)$$

これを $z=1$ から z まで積分すれば

$$\log \left[\frac{f(z)}{f(1)} \right] = \log z + c_0(z-1) + \sum L_\rho(z) \quad (75)$$

よって適当な定数 A を用いて

$$f(z) = Aze^{c_0z} \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}} \quad (76)$$

となる。cot z が奇関数であるので、 $c_0 = 0$ 。また $z \rightarrow 0$ で $\sin z \sim z$ のように振る舞うので $A = 1$ 。よって

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \quad (77)$$

となる。cot z の係数は

$$c_k = \sum \left(\frac{1}{n^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}\right) \frac{1}{\pi^{k+1}} \quad (78)$$

となる。よって $c_{2q} = 0$ 、

$$c_{2q-1} = -\frac{2}{\pi^{2q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2q}} \quad (79)$$

ここで与えた2つの級数 $\sum \frac{1}{l^{2q}}$ 、 $\sum \frac{1}{n^{2q}}$ の収束性は”解析の話発展編”note で調べる。

13.9 ベルヌーイ数を使った表示

ここではベルヌーイ数を定義し、それを使って前節で求めた $\tan z$ 、 $\cot z$ の係数を表す。ベルヌーイ数 B_n は

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \frac{B_3}{6!}x^6 - \dots \quad (80)$$

で定義される。この関数は $\text{Td}(x)$ と書き、トッド関数といわれる。最初のいくつかのベルヌーイ数は ($B_0 = -1$) $B_1 = \frac{1}{6}$ 、 $B_2 = \frac{1}{30}$ 、 $B_3 = \frac{1}{42}$ 、 $\dots$ となる。

$$\begin{aligned} \cot w &= i \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{e^{iw} - e^{-iw}} \\ &= i \frac{2e^{-iw}}{e^{iw} - e^{-iw}} + i \\ &= -2i \frac{1}{1 - e^{2iw}} + i \\ &= \frac{1}{w} \text{Td}(-2iw) + i \\ &= \frac{1}{w} - \frac{2^2 B_1}{2!} w - \frac{2^4 B_2}{4!} w^3 - \frac{2^6 B_3}{6!} w^5 - \dots \end{aligned} \quad (81)$$

よって前節で求めた cot z の係数と比較すれば

$$c_{2q-1} = -\frac{2^{2q} B_q}{(2q)!} \quad (82)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2q}} = \frac{2^{2q-1} B_q \pi^{2q}}{(2q)!} \quad (83)$$

を得る。

同様に

$$\begin{aligned} \tan w &= -i \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \\ &= \frac{2i}{e^{2iw} + 1} - i \\ &= \frac{1}{w} \left(\frac{2iw}{e^{2iw} - 1} - \frac{2 \cdot 2iw}{e^{2 \cdot 2iw} - 1} \right) - i \\ &= \frac{1}{w} \left(\text{Td}(-2iw) - \text{Td}(-2^2 iw) \right) - i \\ &= \frac{2^2(2^2-1)}{2!} B_1 w + \frac{2^4(2^4-1)}{4!} B_2 w^3 \\ &\quad + \frac{2^6(2^6-1)}{6!} B_3 w^5 + \dots \end{aligned} \quad (84)$$

よって tan z の係数と比較して

$$c_{2q-1} = \frac{2^{2q}(2^{2q}-1)}{(2q)!} B_q \quad (85)$$

$$\sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{l^{2q}} = \frac{2^{2q}-1}{2(2q)!} B_q \pi^{2q} \quad (86)$$

を得る。

13.10 オイラー数を使った表示

オイラー数 E_n は

$$\frac{1}{\cos x} = E_0 + \frac{E_1}{2!} x^2 + \frac{E_2}{4!} x^4 + \frac{E_3}{6!} x^6 + \dots \quad (87)$$

で定義される。最初のいくつかは $E_0 = 1$ 、 $E_1 = 1$ 、 $E_2 = 5$ 、 $E_3 = 61$ などである。

これも級数の収束値として表示することが出来る。まず $\frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi s}{2}}$ を考える。これは $s = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ で1位の pole を持つ。1位の値は順に $\pm 1, \mp 1, \pm 1, \dots$ となる。これはベキ級数表示は

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi s}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(E_0 + \frac{E_1}{2!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 s^2 + \frac{E_2}{4!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 s^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (88)$$

ここで、

$$\frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi s}{2}} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots \quad (89)$$

とすると、13.6 節を適応させると

$$c_n = 1 - (-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{(-3)^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{(-5)^{n+1}} + \cdots \quad (90)$$

よって n が奇数の時 $c_n = 0$ 。 n が偶数の時

$$c_{2n} = 2 \left(1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \cdots \right) \quad (91)$$

即ち、係数を比較すれば

$$\sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{1}{l^{2n+1}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{2(2n)!} E_n \quad (92)$$

が得られる。