連分数

TKG

2025 年 3 月 3 日

目 次

1 INTRODUCTION **1**

2 連分数 **2**

2.1 2

2.2 2

2.3 3

2.4 3

3 応用 **3**

3.1 3

3.2 4

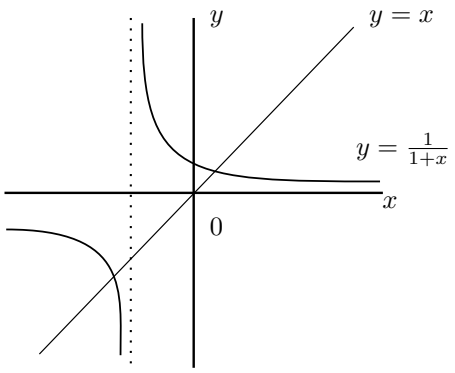
4 **5**

1 INTRODUCTION

連分数とは例えば

$$\phi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+-}}}} \quad \vdots \tag{1}$$

といった形で書ける数のことである。ここではこの値が何になるかを考える。まず、$y = \frac{1}{1+x}$ を考えると幾何学的な理解を得られる。$x-y$ 平面上に $y = \frac{1}{1+x}$ 及び $y = x$ のグラフを書く（下図）。



(2)

最初 $x = x_0$ を選び、

$$a_n = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\vdots\quad 1+x_0}}} \quad n\text{ 段} \tag{3}$$

の収束値が ϕ である。これはグラフで見ると、まず $a_1 = x_0$ である。$x = x_0$ から縦線を引いて $y = \frac{1}{1+x}$ のグラフと交わる点を取る。次にその点から横線を引いて $y = x$ で交わる点からまた縦線を引いて、その縦線と x 軸が交わるところが a_2 である。以下その繰り返し操作を行い、収束していく点が ϕ である。この収束点は実際にこの操作をやってみればわかるが、$x_0 > -1$ であれば $y = x$ と $y = \frac{1}{1+x}$ の交点（右側）に収束していく。従って $x = \frac{1}{1+x}$ の正の解が収束点である。即ち $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ である。また $x_0 = -1$ の時発散する。$x_0 < -1$ の時はほとんどの点では $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ へ収束していくが、$x = -1$ からこの操作の逆をたどっていける点全てにおいて発散することが分かる。

以上のように連分数とは、分数の形で定義された数列の極限値として定義される。この note ではこの連分数について簡単な考察をする。

2　連分数

2.1

連分数

$$\phi_1 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\vdots}}} \tag{4}$$

を考える。例えば

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\vdots}}}, \quad \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\vdots}}} \tag{5}$$

のようなものである。一般に無限連分数を作って、それが収束するとは限らない。そこで有限連分数を考え、その極限を取って収束するかどうかを考える。まず無限連分数として

$$\phi_2 = \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\vdots}}}, \cdots, \qquad \phi_n = \cfrac{a_n}{b_n + \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{\vdots}}} \tag{6}$$

とすると漸化式

$$\phi_n = \frac{a_n}{b_n + \phi_{n+1}} \tag{7}$$

を得る。また有限連分数

$$\Phi_n = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\vdots \cfrac{}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}} \tag{8}$$

を考える時、

$$\phi_1 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\vdots \cfrac{}{b_{n-1} + \phi_n}}} \tag{9}$$

であるので、Φ_n は ϕ_1 の ϕ_n を $\frac{a_n}{b_n}$ に置き換えたものに等しい。ここで $\phi_1 = \lim_{n\to\infty} \Phi_n$ と書ける。

例 1)　$a_n = 1,\ b_n = 1$ の時、有限連分数 Φ_n の列は $\{\Phi_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5},\ \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \cdots\}$ で与えられ、$\Phi_n \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ である。

例 2)　$a_n = 1,\ b_n = 2$ の場合には有限連分数 Φ_n の列は $\{\Phi_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \cdots\}$ であり、$\Phi_n \to \sqrt{2} - 1$ である。

2.2

さて、ここで $\phi_1 = \frac{a_1}{b_1 + \phi_2}$ となるが、ϕ_1 を ϕ_3 で表せば

$$\phi_1 = \frac{a_1\phi_3 + a_1 b_2}{b_1\phi_3 + a_2 + b_1 b_2} \tag{10}$$

となる。さらに ϕ_1 を ϕ_4 で表せば

$$\phi_1 = \frac{a_1 b_2 \phi_4 + a_1 a_3 + a_1 b_2 b_3}{(a_2 + b_1 b_2)\phi_4 + a_3 b_1 + b_1 b_2 b_3} \tag{11}$$

となる。一般には ϕ_1 を ϕ_n で表したとすると、次にそれを ϕ_{n+1} で表す時、$\phi_n = \frac{a_n}{b_n + \phi_{n+1}}$ となることから、分母分子共に ϕ_n のかかってない項が次の ϕ_{n+1} の係数となるのが分かる。ϕ_{n+1} のかかってない項は ϕ_n の係数に a_n をかけて、それに ϕ_{n+1} の係数に b_n をかけたものを加えたものになる。即ち ϕ_1 を ϕ_n で表したとき、分子の ϕ_n の係数を K_n、分母のほうを P_n で表せば、一般には

$$\phi_1 = \frac{K_n\phi_n + K_{n+1}}{P_n\phi_n + P_{n+1}} \tag{12}$$

となるが分かる。ここで P_n, K_n は

$$P_{n+2} = a_n P_n + b_n P_{n+1}, \quad K_{n+2} = a_n K_n + b_n K_{n+1} \tag{13}$$

の漸化式を満たし、初項は $P_2 = 1, P_3 = b_1, K_2 = 0, K_3 = a_1$ で与えられる。この無限連分数の ϕ_n での表示 (12) の ϕ_n を $\frac{a_n}{b_n}$ で置き換えれば、それが有限連分数 Φ_n となる。従って Φ_n は

$$\Phi_n = \frac{K_{n+2}}{P_{n+2}} \tag{14}$$

と書ける。即ち数列 P_n, K_n が求まれば Φ_n が求まる。

2.3

次に ϕ_1 を ϕ_n で表示した時に、分子を分母で割って分子から ϕ_n を取ることが出来る。その時の表示を

$$\phi_1 = \frac{Q_n}{P_n\phi_n + P_{n+1}} + R_n \tag{15}$$

とする。数列 Q_n, R_n と K_n との関係を見てみる。上式を分数で表すと

$$\phi_1 = \frac{P_nR_n\phi_n + Q_n + R_nP_{n+1}}{P_n\phi_n + P_{n+1}} \tag{16}$$

となる。従って $K_n = P_nR_n,\ K_{n+1} = Q_n + R_nP_{n+1}$ となる。$K_{n+1} = P_{n+1}R_{n+1}$ となることにより、$P_{n+1}R_{n+1} = Q_n + R_nP_{n+1}$ となる。従って $R_{n+1} = R_n + \frac{Q_n}{P_{n+1}}$ である。即ち

$$R_n = \frac{Q_{n-1}}{P_n} + \frac{Q_{n-2}}{P_{n-1}} + \cdots + \frac{Q_2}{P_3} + R_2 \tag{17}$$

が得られる。$\phi_1 = \frac{a_1}{b_1+\phi_2}$ より $R_2 = 0$ である。これより

$$R_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{Q_k}{P_{k+1}} \tag{18}$$

を得る。

次に ϕ_1 を ϕ_{n+1} で表示すると

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{Q_n(b_n + \phi_{n+1})}{P_{n+1}\phi_{n+1} + P_{n+2}} + R_n \\ &= \frac{\frac{Q_n}{P_{n+1}}(P_{n+1}\phi_{n+1} + P_{n+2}) + (b_n - \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}})Q_n}{P_{n+1}\phi_{n+1} + P_{n+2}} + R_n \\ &= \frac{-\frac{a_nP_n}{P_{n+1}}Q_n}{P_{n+1}\phi_{n+1} + \phi_{n+2}} + \frac{Q_n}{P_{n+1}} + R_n \end{aligned} \tag{19}$$

これより $Q_{n+1} = -a_n\frac{P_n}{P_{n+1}}Q_n$ を得る。この漸化式より

$$\begin{aligned}Q_n &= \left(-a_{n-1}\frac{P_{n-1}}{P_n}\right)\left(-a_{n-2}\frac{P_{n-2}}{P_{n-1}}\right)\cdots\left(-a_2\frac{P_2}{P_3}\right)Q_2 \\ &= (-1)^{n-2}\frac{P_2}{P_n}a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2Q_2 \end{aligned} \tag{20}$$

を得る。ここで $(-1)^{n-2} = (-1)^n$、$P_2 = 1, Q_2 = a_1$ より

$$Q_n \quad = \quad (-1)^n\frac{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1}{P_n} \tag{21}$$

となる。(18) に代入すれば

$$R_n = \frac{a_1}{P_2P_3} - \frac{a_1a_2}{P_3P_4} + \frac{a_1a_2a_3}{P_4P_5} - \cdots + (-1)^n\frac{a_1\cdots a_{n-1}}{P_{n-1}P_n} \tag{22}$$

と書ける。ここで $\Phi_n = \frac{K_{n+2}}{P_{n+2}}$ 及び $K_n = P_nR_n$ より $\Phi_n = R_{n+2}$ となることが分かる。

2.4

前節の結果より

$$\Phi_n = \frac{a_1}{P_2P_3} - \frac{a_1a_2}{P_3P_4} + \frac{a_1a_2a_3}{P_4P_5} - \cdots + \frac{(-1)^n\prod_{k=1}^n a_k}{P_{n-1}P_n} \tag{23}$$

が得られるが、この級数が収束することが ϕ_1 が存在する条件になる。$a_n > 0, b_n > 0$ などの条件が分かってれば、これは条件付き収束の条件 $\frac{a_1\cdots a_n}{P_{n+1}P_{n+2}} \to 0$ が満たされればよい。

例 1)　$a_n = 1, b_n = 1$ の場合には P_n は単調増加数列（フィボナッチ数列）となるので収束する。

例 2)　$a_n = n, b_n = 1$ なる場合には $P_{n+2} = nP_n + P_{n+1}$ となり

$$\frac{a_1\cdots a_{n-1}}{P_nP_{n+1}} = \frac{(n-1)!}{P_nP_{n+1}} < \frac{1}{n} \quad (n \geq 6) \tag{24}$$

となり、収束する。この条件は帰納的に示すことが出来る。

3　応用

3.1

級数

$$S_n = \frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{A_n}{B_n} \tag{25}$$

が与えられた時に、これを連分数表示することを考えてみる。即ち

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1\cdots a_n}{P_{n+1}P_{n+2}} \tag{26}$$

今 $a_1, \cdots, a_{n-1}$、$b_1, \cdots, b_{n-1}$ が求められていたとすると、

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{(a_1\cdots a_{n-1})a_n}{P_{n+1}(a_nP_n + b_nP_{n+1})} \tag{27}$$

であるので、a_n は

$$a_n = \frac{A_nP_{n+1}^2}{(a_1\cdots a_{n-1})B_n - P_nP_{n+1}A_n} \cdot b_n \tag{28}$$

で与えられる。ただしここでは $n \geq 2$ の場合である。$n = 1$ の時は

$$a_1 = \frac{A_1}{B_1}b_1 \tag{29}$$

である。

例 1)　$B_n = 1$ とすると、$a_1 = A_1 b_1$。さらに $b_1 = 1, a_1 = A_1$ とすると $a_2 = \frac{A_2}{A_1 - A_2} b_2$ となる。さらに $a_2 = A_2, b_2 = A_1 - A_2$ とすると、$a_3 = \frac{A_1 A_3}{A_2 - A_3} b_3$。一般に $n \geq 3$ で $a_n = A_{n-2} A_n, b_n = b_{n-1} - b_n$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
&A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \cdots \\
&\quad = \cfrac{A_1}{1 + \cfrac{A_2}{A_1 - A_2 + \cfrac{A_1 A_3}{A_2 - A_3 + \cfrac{A_2 A_4}{A_3 - A_4 + \cfrac{A_3 A_5}{\vdots}}}}}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

例 2)　逆に $A_n = 1$ の場合。$a_1 = \frac{1}{B_1} b_1$。$a_1 = 1, b_1 = B_1$ とし、順次計算していけば $a_2 = B_1^2$、$b_2 = B_2 - B_1$、$a_3 = B_2^2, b_3 = B_3 - B_2$。帰納的に $a_n = B_{n-1}^2, b_n = B_n - B_{n-1}$ となる。従って

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} + \frac{1}{B_3} - \frac{1}{B_4} + \cdots \\
&\quad = \cfrac{1}{B_1 + \cfrac{B_1^2}{B_2 - B_1 + \cfrac{B_2^2}{B_3 - B_2 + \cfrac{B_3^2}{\vdots}}}}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

が得られる。

以上の例を具体的に応用してみる。例えば

$$
\begin{aligned}
\ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \\
&= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{3^2}{1 + \cfrac{4^2}{1 + \cfrac{5^2}{\vdots}}}}}}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

或いは

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \\
&= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{\vdots}}}}}}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

3.2

数列 a_n をもう少し便利な形で表示してみる。(26) より

$$
\frac{\left(\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}\right)}{\left(\frac{A_n}{B_n}\right)} = \frac{P_{n+1}}{P_{n+3}} a_{n+1} \tag{34}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} &= \frac{A_n}{B_n} \frac{P_{n+3} - a_{n+1} P_{n+1}}{P_{n+3}} \\
&= \frac{A_n}{B_n} \frac{P_{n+2}}{P_{n+3}} b_{n+1}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
P_{n+3} &= \frac{\frac{A_n}{B_n} P_{n+2} b_{n+1}}{\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}} \\
&= a_{n+1} P_{n+1} + b_{n+1} P_{n+2}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

従って

$$
a_{n+1} P_{n+1} = \frac{\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} b_{n+1} P_{n+2}}{\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}} \tag{37}
$$

ここで (37) に対して P_{n+2} を (36) を用いて、両辺から P_{n+1} を消去すれば（a_{n+1} を a_n で書き直せば）$n \geq 3$ の時

$$
a_n = \left(\frac{\frac{A_n}{B_n}}{\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n}} \right) \left(\frac{\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}}{\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}} \right) b_n b_{n-1} \tag{38}
$$

となる。$n = 1, 2$ の時は

$$
a_1 = \frac{A_1}{B_1} b_1, \quad a_2 = \frac{\frac{A_2}{B_2}}{\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2}} b_1 b_2 \tag{39}
$$

で与えられる。

例 1)　$A_n = 1,\ B_n = n!$ の場合には

$$a_n == \frac{1}{n-2} b_n b_{n-1} \tag{40}$$

従って $b_n = n-1$ と置けば $a_n = n-1$ となり、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{e} &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \cdots \\ &= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{\vdots}}}}}} \end{aligned} \tag{41}$$

が得られる。

4

数列 P_n の振る舞いについて考える。$P_{n+2} = a_n P_n + b_n P_{n+1}$ である。これを

$$P_{n+2} + \alpha_{n+1} P_{n+1} = \beta_n (P_{n+1} + \alpha_n P_n) \tag{42}$$

の形に書くことを考える。これは β_n が全てもとまれば等比数列として計算することが出来る。実際に係数を比較すれば

$$\beta_n - \alpha_{n+1} = b_n, \quad \beta_n \alpha_n = a_n \tag{43}$$

これらより直ちに漸化式

$$\alpha_n = \frac{a_n}{b_n + \alpha_{n+1}} \tag{44}$$

が得られる。これは ϕ_n の満たす漸化式に等しい。従って $\alpha_n = \phi_n$ であり、$\beta_n = \frac{a_n}{\alpha_n}$ である。従って P_n は

$$\begin{aligned} P_{n+2} + \phi_{n+1} P_{n+1} &= \frac{a_n}{\phi_n}(P_{n+1} + \phi_n P_n) \\ &= (b_n + \phi_{n+1})(P_{n+1} + \phi_n P_n) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (b_k + \phi_{k+1}) \end{aligned} \tag{45}$$

となる。ここで P_1 は定義してないが、$P_2 = 1,\ P_3 = b_1$ を考慮して $P_1 = 0$ と定義するとよい。これにより

$$P_{n+1} = -\phi_n P_n + \prod_{k=1}^{n-1} (b_k + \phi_{k+1}) \tag{46}$$

を得る。

数列 K_n についても P_n と同様の漸化式を満たし、$K_2 = 0,\ K_3 = a_1$ に注意すれば $K_1 = 1$ と定義することが出来る。P_n と同様にして

$$K_{n+1} = -\phi_n K_n + \phi_1 \prod_{k=1}^{n-1} (b_k + \phi_{k+1}) \tag{47}$$

を得る。

これら漸化式を見比べてみると、(46) に K_n をかけて、(47) に P_n をかけて辺々引けば

$$\begin{aligned} P_{n+1}K_n - P_n K_{n+1} &= (K_n - \phi_1 P_n) \prod_{k=1}^{n-1} (b_k + \phi_{k+1}) \\ &= (K_n - \phi_1 P_n) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{\phi_k} \end{aligned} \tag{48}$$

となる。次に $K_{n+1} - \phi_1 P_{n+1}$ を計算すると

$$K_{n+1} - \phi_1 P_{n+1} = -\phi_n (K_n - \phi_1 P_n) \tag{49}$$

従って

$$\frac{a_k}{\phi_k} = -\frac{K_k - \phi_1 P_k}{K_{k+1} - \phi_1 P_{k+1}} a_k \tag{50}$$

従って

$$\begin{aligned} P_{n+1}K_n - P_n K_{n+1} &= \frac{a_1}{\phi_1}(K_2 - \phi_1 P_2)(-1)^{n-2} \prod_{k=2}^{n-1} a_k \\ &= (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} a_k \end{aligned} \tag{51}$$

となる[1]。もし $a_n = 1$ である連分数の場合には、P_n と K_n は互いに素であることになる[2]。従って有限連分数 $\Phi_n = \frac{K_{n+2}}{P_{n+2}}$ の分子と分母は互いに素である。

[1] この結果はもっと簡単にも導くことが出来る。

[2] 整数論の基本的な定理、整数 a, b に対して、ある整数 x, y が存在し

$$ax + by = 1 \tag{52}$$

を満たすならば $(a, b) = 1$ である。