

定積分の置換で積分区間も変える

Jin

2026 年 8 月 1 日

置換積分を一問計算しました。不定積分と違って積分区間も変えるところで一度符号を間違えたので、その確認も兼ねたメモです。

1 問題

$$I = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$$

を計算します。

2 計算

$t = 1 - x^2$ とおくと

$$dt = -2x dx, \quad (1)$$

$$x dx = -\frac{1}{2} dt. \quad (2)$$

また、端点も t で書き直すと

$$x = 0 \Rightarrow t = 1, \quad (3)$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 0 \quad (4)$$

なので、

$$I = \int_1^0 \sqrt{t} \left(-\frac{1}{2}\right) dt \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{1/2} dt \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 \quad (7)$$

$$= \frac{1}{3}. \quad (8)$$

3 符号の確認

一回目は、 $x dx = -\frac{1}{2}dt$ のマイナスと、積分区間を 1 から 0 にしたことを別々に処理できていませんでした。今回は

$$-\frac{1}{2} \int_1^0 t^{1/2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{1/2} dt$$

の一行を省略しないようにしました。

$x = \sin \theta$ とおく計算でも $\frac{1}{3}$ になりましたが、この問題では $1-x^2$ をそのまま置いたほうが短かったです。