幾何のお話2

TKG

2025 年 3 月 5 日

目 次

1 INTRODUCTION

この note では 1 次元の曲線や 2 次元の曲面のトピックを取り上げたいと思います。詳細まで全てをカバーはしきれないので、しっかりと勉強されたい方はものの本を読まれたいと思います。基本的には出来るだけ直感的な説明を心がけますが、きちんと理解するには多少厳密なことを理解することも必要になると思いますので適度に厳密性を持たせたいと思います。

2 曲線と曲面の幾何学

2.1 平面内の曲線の幾何学

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の曲線を考える。平面の座標は $\mathbf{x} = (x, y)$ で表し、曲線 $C : I \to \mathbb{R}^2$ を考えて、曲線上の位置は $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t$ のように t をパラメータにとる。

速度ベクトルは $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ である。$t = 0$ から t までの曲線の長さ s は

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}| dt = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \tag{1}$$

で与えられる。全微分をとれば

$$ds = |\mathbf{v}| dt \tag{2}$$

となる。パラメータとしてこの s を取り直すと、速度ベクトルは

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\ &= \frac{\mathbf{v}}{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)} \\ &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\end{aligned} \tag{3}$$

となり、大きさ 1 の単位ベクトルとなる。このベクトルを $\mathbf{e}$ と書くことにする。

$$\mathbf{e} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \tag{4}$$

即ち、$\mathbf{e}$ は曲線 C の位置 $\mathbf{x}$ での接線方向を向く単位ベクトルである。

$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}\rangle = 1$ を s で微分すれば、$\left\langle \mathbf{e}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0$ が得られ、$\mathbf{e}$ と $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s}$ は直交していることが分かる。ここで $\mathbf{n}$ を $\mathbf{e}$ を $\frac{\pi}{2}$ だけ反時計回りに回転させた単位ベクトルとする。即ち、

$$\mathbf{n} = \Omega\cdot\mathbf{e}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

この時、κ を

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{n} \tag{6}$$

で定義する。この κ を曲線の位置 $\mathbf{x}$ での**曲率**と呼ぶ。(6) 式は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s} = \kappa\Omega\cdot\mathbf{e} \tag{7}$$

と書ける。従って

$$\mathbf{x}(s+\Delta s) = \mathbf{x}(s) + \mathbf{e}\Delta s + \frac{1}{2!}\kappa\mathbf{n}\Delta s^2 + \cdots \tag{8}$$

と書ける。ここで κ が曲線の位置によらずに一定でかつ正であるとすると、$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} = 0$ であるので、上式をさらに s で微分すれば

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{e}}{\mathrm{d}s^2} = -\kappa^2\mathbf{e} \tag{9}$$

となる。これは円運動の方程式である。ここで

$$ds = \frac{1}{\kappa}d\theta \tag{10}$$

と置くと、円運動の方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{e}}{\mathrm{d}\theta^2} = -\mathbf{e} \tag{11}$$

となる。これは簡単に解くことができて $\theta = 0$ の時に $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0$ であるとすると

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= e^{\Omega\theta}\cdot\mathbf{e} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\mathbf{e}_0\end{aligned} \tag{12}$$

となるので、θ は実際に円運動の角度を表していることが分かる。従って $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ が角速度であることが分かる。

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\mathbf{v}| = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

であるので、円運動をする質点の速度 v と円の半径 r と角速度 w との関係 $v = rw$ と比較すると、$\frac{1}{\kappa}$ が円の半径であることが分かる。このことから、一般的に曲率 κ が一定でない、従って曲線が円でない場合においても、局所的には近似的に円と見なせて、その円の半径が $\frac{1}{\kappa}$ であることが分かる。このことから $\frac{1}{\kappa}$ は**曲率半径**と呼ばれる。この時 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ が正であるので、曲線に沿った接ベクトルは反時計回りに向きが変わることが分かる。κ が負である場合にはこの関係式から $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ が負となり、時計回りとなる。この時には $\frac{1}{|\kappa|}$ が曲率半径となる。また κ が 0 の時には $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ でないといけないので、曲線は直線的になることが分かる。この場合には曲率半径は形式的に ∞ となる。

曲線が閉曲線である場合を考えると、$t = 0$ から出発してある $t = t_1$ でもとの位置に戻る。この時の $s = L$ はこの閉曲線の長さである。また先ほど定義した θ に関して、$t = 0$ で $\theta = 0$ から出発して、$t = t_1$ で $\theta = \theta_1$ になるとする。今 (7) の円運動の方程式を θ に関する微分に置き換えると

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}\theta} = \Omega \cdot \mathbf{e} \tag{14}$$

となり、さらに θ で微分することより

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{e}}{\mathrm{d}\theta^2} = -\mathbf{e} \tag{15}$$

とやはり円運動の方程式が得られる。従って $\theta = 0$ のときに $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0$ であるとすると、

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{e}_0 \tag{16}$$

となる。$t = 0$ で出発点での閉曲線の接線ベクトル $\mathbf{e}_0$ から出発して、$t = t_1$ でもとの位置に戻った時、接線ベクトルもまた同じ $\mathbf{e}_0$ に戻ってないといけない。これらのことから適当な正の整数 n があって、$\theta_1 = 2\pi n$ と書けることがわかる。従って $d\theta = \kappa ds$ より

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_C \kappa ds \tag{17}$$

となることが分かる。特に $\kappa > 0$ で、閉曲線が円であるならば、$n = 1$ となる。また一般的に閉曲線が自分自身と交差することのない**単純閉曲線**であるならば $n = 1$ である。原点を囲む閉曲線上の適当な始点から出発して、原点の周りを 2 週して元の始点に戻るような閉曲線の場合には $n = 2$ である。$\kappa < 0$ の場合には円の回転方向が逆向きになり、これらの値に負符号がつくことになる。

最後に κ を具体的に計算しておく。$\mathbf{e}$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left(\dot{\mathbf{v}} - \frac{\langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \mathbf{v}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

一方、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t} = \kappa|\mathbf{v}|\mathbf{n} = \kappa|\mathbf{v}|\Omega \cdot \mathbf{e} \tag{19}$$

なので、それぞれを比べて、また $|\Omega \cdot \mathbf{e}|^2 = 1$ より

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\left(\langle \Omega \cdot \mathbf{e}, \dot{\mathbf{v}} \rangle - \frac{\langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \langle \Omega \cdot \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle\right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{v}|^3}\left(\langle \Omega \cdot \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle - \frac{\langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \langle \Omega \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle\right) \end{aligned} \tag{20}$$

ここで簡単な計算により $\langle \Omega \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ であることが確かめられるので、

$$\kappa = \frac{\langle \Omega \cdot \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{v}|^3} \tag{21}$$

と求まる。これから $\mathrm{d}\theta = \kappa|\mathbf{v}|\mathrm{d}t$ より

$$\mathrm{d}\theta = \left\langle \mathbf{n}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t} \right\rangle \mathrm{d}t = \frac{\langle \Omega \cdot \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{v}|^2}\mathrm{d}t \tag{22}$$

が得られる。従って $t = t_0$ から $t = t_1$ までの間の速度ベクトルの回転角 $\Delta\theta$ が

$$\Delta\theta = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \mathbf{n}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\langle \Omega \cdot \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{v}|^2}\mathrm{d}t \tag{23}$$

などとして計算することができる。

ここで曲線に沿った運動を

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = v_e\mathbf{e} + v_n\mathbf{n} \tag{24}$$

と曲線の接線方向と曲線に直交する方向成分とに分けた形で表してみる。一方で $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\mathbf{e}$ なので

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}|\mathbf{v}|}{\mathrm{d}t}\mathbf{e} + |\mathbf{v}|\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}|\mathbf{v}|}{\mathrm{d}t}\mathbf{e} + \kappa|\mathbf{v}|^2\mathbf{n} \end{aligned} \tag{25}$$

と表すことができる。従って $v_e = \frac{\mathrm{d}|\mathbf{v}|}{\mathrm{d}t}$ であり、$v_n = \kappa|\mathbf{v}|^2$ である。曲線に直交する方向成分は平面内での回転を表していた。そこで考えている平面 $\mathbb{R}^2$ に垂直方向のベクトル $\mathbf{w} = (0, 0, w)$ を用いて

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = v_e\mathbf{e} + \mathbf{w} \times \mathbf{v} \tag{26}$$

の形で表すことを考えてみる。すると、

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = w|\mathbf{v}|\mathbf{n} \tag{27}$$

であるのでこれらより改めて (13) で与えられた角速度の関係式

$$w = \kappa|\mathbf{v}| \tag{28}$$

が得られる。力学的なことに少し触れると、曲線に沿って運動する質点に対して $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ に質点の質量をかけたものはこの質点に働く向心力を表している。従って質点からすればそれとは逆の方向への遠心力が働いていることが分かる。

2.2 3 次元空間の中の曲線の幾何学

今度は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の曲線 C の幾何学。曲線上の位置 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t$ に対して、速度ベクトルは $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ であり、平面上の曲線の時と同じように曲線の長さ s は

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}|dt = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt \quad (ds = |\mathbf{v}|dt) \tag{29}$$

となる。s でパラメータを取り直すと、

$$\mathbf{e} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \tag{30}$$

である。$\mathbf{e}$ の s での微分は $|\mathbf{e}|^2 = 1$ より、$\left\langle \mathbf{e}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s} \right\rangle = 0$ となり、やはり $\mathbf{e}$ 自身と直交して、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s} = \kappa \cdot \mathbf{n} \tag{31}$$

のように書ける。ここで $\mathbf{n}$ は $\mathbf{e}$ と直交する単位ベクトル ($|\mathbf{n}|^2 = 1$) ではあるが、今回は 3 次元の中の曲線なので $\mathbf{e}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転させて $\mathbf{n}$ に一致する回転軸が一般的には t と共に変化する。また $\mathbf{n}$ の向きも定まらないので $\kappa > 0$ として定義することで $\mathbf{n}$ の向きを固定する。位置 $\mathbf{x}$ を始点として 2 つの単位ベクトル $\mathbf{e}$ と $\mathbf{n}$ が得られたが、もうひとつ線形独立な単位ベクトルを選ぶことができる。$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$、$\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}$ と置いて、$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e} \times \mathbf{n}$ で定義すれば 3 つ目の単位ベクトルを決定することができる。$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ を s で微分すると

$$\kappa + \left\langle \mathbf{e}_1, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s} \right\rangle = 0 \tag{32}$$

が得られることから $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s}$ の $\mathbf{e}_1$ 成分が $-\kappa$ であることが分かる。また $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1$ を s で微分すれば $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s}$ が $\mathbf{e}_2$ と直交していることが分かるので、それらを合わせて

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s} = -\kappa \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3 \tag{33}$$

のように書けるということが分かる。最後に $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = 1$ を s で微分して

$$\tau + \left\langle \mathbf{e}_2, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}s} \right\rangle = 0 \tag{34}$$

となることと、$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = 1$ を s で微分すれば

$$\left\langle \mathbf{e}_1, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}s} \right\rangle = 0 \tag{35}$$

が得られるので、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}s} = -\tau \mathbf{e}_2 \tag{36}$$

となることが分かる。まとめると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \tag{37}$$

と書ける。κ を曲線の曲率といい、τ を**捩率** (torsion) と呼ぶ。

$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ を t で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \left(\dot{\mathbf{v}} - \frac{\langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \mathbf{v} \right) \tag{38}$$

となるが、一方で (31) より

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t} = \kappa |\mathbf{v}| \mathbf{e}_2 \tag{39}$$

であるので、これらを比較して κ を計算することができる。まず、(38) の右辺を規格化すれば $\mathbf{e}_2$ が得られるので、

$$\mathbf{e}_2 = \frac{|\mathbf{v}|}{\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \langle \dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}} \rangle - \langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle^2}} \left(\dot{\mathbf{v}} - \frac{\langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \mathbf{v} \right) \tag{40}$$

であることが分かる。これから κ は

$$\kappa = \frac{\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \langle \dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}} \rangle - \langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \rangle^2}}{|\mathbf{v}|^3} \tag{41}$$

と求まる。

別の方法で κ を計算することも出来る。この計算では κ の別の表記が得られるだけでなく、τ の表記も得ることができる。まず、$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_1$ を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{e}_1 + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathbf{e}_2 \tag{42}$$

さらに t で微分すると

$$\ddot{\mathbf{v}} = \kappa\tau\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3\mathbf{e}_3 + \cdots \tag{43}$$

となる。ここで $\cdots$ の箇所は $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ の項である。以下の計算では必要がないので省略している。従って

$$\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}} = \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3\mathbf{e}_3 \tag{44}$$

となるが、$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\mathbf{v}|$ であるので

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}}|}{|\mathbf{v}|^3} \tag{45}$$

が得られる。また $\mathbf{v}$、$\dot{\mathbf{v}}$、$\ddot{\mathbf{v}}$ のそれぞれを縦ベクトルとして、それらを列にして並べてできる行列を $(\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},\ddot{\mathbf{v}})$ として、その行列式を計算すると、

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},\ddot{\mathbf{v}}) &= \det\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_1, \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathbf{e}_2, \kappa\tau\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3\mathbf{e}_3\right)\\ &= \kappa^2\tau\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^6\\ &= \tau|\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}}|^2\end{aligned} \tag{46}$$

となるので

$$\tau = \frac{\det(\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},\ddot{\mathbf{v}})}{|\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}}|^2} \tag{47}$$

が得られる。

(45) と (45) との違いは以下のようにして互いに一致しているというのが確認できる。即ち、$\mathbf{v}$ と $\dot{\mathbf{v}}$ のそれぞれを縦ベクトルとして、それらを列にして並べてできる行列 $(\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}})$ を考える。この行列の行列式の 2 乗を計算すると、

$$\begin{aligned}|\det(\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}})|^2 &= \det\left((\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}})^t\cdot(\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}})\right)\\ &= \det\begin{pmatrix}\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}}\rangle\\ \langle\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}}\rangle & \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\end{pmatrix}\\ &= \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\langle\dot{\mathbf{v}},\dot{\mathbf{v}}\rangle - \langle\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}}\rangle^2\end{aligned} \tag{48}$$

となる。一方で $|\det(\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}})|$ はベクトル $\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}}$ の大きさに等しいことが簡単に確かめることができる。即ち

$$|\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}}| = \sqrt{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\langle\dot{\mathbf{v}},\dot{\mathbf{v}}\rangle - \langle\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}}\rangle} \tag{49}$$

となり、実際に 2 通りの κ の表記が一致していることが確かめられた。

2.3 曲面の中の曲線

先ほどは 3 次元空間の中の曲線についてだったが、今度は曲面の中にある曲線の幾何学。曲面の座標を $\mathbf{u}=(u^1,u^2)$ のようにとる。すると 3 次元空間の中での位置 $\mathbf{x}=(x,y,z)$ は (u^1,u^2) の関数として表すことができる。即ち、$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{u})$ と書ける。3 次元空間の中での曲線の位置を $\mathbf{x}=\mathbf{x}_t$ で表す。速度ベクトルは $\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ であり、曲線の長さ s も同じである。s による $\mathbf{x}$ の微分は

$$\mathbf{e}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \tag{50}$$

となる。$\mathbf{e}$ の s での微分は、やはり $\mathbf{e}$ 自身と直交しており、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s}=\kappa_g\mathbf{e}_g+\kappa_n\mathbf{e}_n \tag{51}$$

のように書ける。ここで $\mathbf{e}_g$ は $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s}$ の曲面の単位接ベクトルであり、$\mathbf{e}_n$ は曲面の単位法ベクトルである。ここで $\mathbf{e}_g$ の向きはまだ不定であるが、$\mathbf{e}$ と $\mathbf{e}_g$ を縦ベクトルとして列にして並べてできる行列 $(\mathbf{e},\mathbf{e}_g)$ の行列式 $\det(\mathbf{e},\mathbf{e}_g)$ の符号と、同じく $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}u^1}$ と $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}u^2}$ を並べてできる行列 $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{u}}$ の行列式 $\det\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{u}}\right)$ の符号が一致するようにとる。また $\mathbf{e}_n=\mathbf{e}\times\mathbf{e}_g$ とする。これで $\mathbf{e}_g$ と $\mathbf{e}_n$ が決定できる。κ_g と κ_n はそれぞれ $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s}$ の $\mathbf{e}_g$ 方向の成分と $\mathbf{e}_n$ 方向の成分であり、それぞれ**測地的曲率**と**法曲率**と呼ばれる。また測地的曲率が $\kappa_g=0$ となる曲線を**測地線**と呼ぶ。

一方、実際の計算上は $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2):=\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^1},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^2}\right)$ を基底ベクトルに取って計算した方が良い場合がある。この場合には 3 つ目の基底ベクトルとして法ベクトル

$$\mathbf{u}_3=\frac{\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2|} \tag{52}$$

を取る。この基底を用いて曲線の接ベクトルを

$$\mathbf{e}=v^1\mathbf{u_1}+v^2\mathbf{u_2},\quad v^i=\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\quad(i=1,2) \tag{53}$$

と書く。曲面上の曲線の長さ s は

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= |\mathbf{v}|^2\,dt^2\\ &= \left\langle\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right\rangle dt^2\\ &= \sum_{i,j=1,2}\left\langle\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^i},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^j}\right\rangle\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}(dt)^2\end{aligned} \tag{54}$$

であるので、線素

$$(ds)^2=\left\langle\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^1},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^1}\right\rangle(du^1)^2+2\left\langle\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^1},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^2}\right\rangle du^1du^2+\left\langle\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^2},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^2}\right\rangle(du^2)^2 \tag{55}$$

が得られる。これを**第一基本形式**と呼ぶ。第一基本形式の係数を行列としてみた時、即ち

$$\mathcal{S}=\begin{pmatrix}\left\langle\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^1},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^1}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^1},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^2}\right\rangle\\ \left\langle\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^2},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^1}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^2},\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^2}\right\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1\rangle & \langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle\\ \langle\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1\rangle & \langle\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2\rangle\end{pmatrix} \tag{56}$$

とすると、線素は

$$(ds)^2=\langle\mathbf{v},\mathcal{S}\mathbf{v}\rangle\,(dt)^2 \tag{57}$$

と書ける。

$\mathbf{e}$ の s での微分は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s}\mathbf{u}_1 + v^1\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_1}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s}\mathbf{u}_2 + v^2\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_2}{\mathrm{d}s} \tag{58}$$

となる。ここで $\mathbf{u}_i$ の s での微分は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_i}{\mathrm{d}s} = w_i^1\mathbf{u}_1 + w_i^2\mathbf{u}_2 + w_i^3\mathbf{u}_3 \tag{59}$$

のように書けるので、これを用いると、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s} + v^1w_1^1 + v^2w_2^1\right)\mathbf{u}_1 + \left(\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s} + v^1w_1^2 + v^2w_2^2\right)\mathbf{u}_2 + \left(v^1w_1^3 + v^2w_2^3\right)\mathbf{u}_3 \tag{60}$$

が得られる。1 つ目と 2 つ目の項の係数はまとめて

$$\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}s} + \sum_{j=1,2} v^j w_j^i \quad (i = 1, 2) \tag{61}$$

と書ける。ここで $\mathbf{u}_i$ の s での微分を具体的に書くと

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_i}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^i}\right) \\
&= \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^i\partial u^1}\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^i\partial u^2}\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^i\partial u^1}v^1 + \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^i\partial u^2}v^2
\end{aligned} \tag{62}$$

従って w_i^j は v_k の一次式で書けるので、

$$w_j^i = \sum_{k=1,2} \Gamma^i_{jk} v^k \tag{63}$$

のように書ける。$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s}$ の曲面の接ベクトルは $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ の成分なので、それらの成分が 0 と置くことで**測地線の方程式**

$$\frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{j,k=1,2} \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{64}$$

が得られる。Γ^i_{jk} は Christoffel **の記号**と呼ばれる。$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_i}{\mathrm{d}s}$ と $\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$ との内積を取ると、(59) と (62) より

$$\mathcal{S}\begin{pmatrix} w_i^1 \\ w_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{u}_1, \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^i\partial u^1}\right\rangle & \left\langle \mathbf{u}_1, \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^i\partial u^2}\right\rangle \\ \left\langle \mathbf{u}_2, \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^i\partial u^1}\right\rangle & \left\langle \mathbf{u}_2, \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^i\partial u^2}\right\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \tag{65}$$

従って (63) と比べると

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{jk} &= \sum_{r=1}^{2}\left(\mathcal{S}^{-1}\right)^{ir}\left\langle \mathbf{u}_r, \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^j\partial u^k}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\left(\mathcal{S}^{-1}\right)^{ir}\left(\frac{\partial\mathcal{S}_{rk}}{\partial u^j} + \frac{\partial\mathcal{S}_{rj}}{\partial u^k} - \frac{\partial\mathcal{S}_{jk}}{\partial u^r}\right)
\end{aligned} \tag{66}$$

となり、Christoffel 記号を線素の係数の行列を用いて表すことができる。この式から分かるように $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ と下付きの添え字に関して対称である。

$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s}$ の $\mathbf{u}_3$ 成分は法曲率 κ_n に等しく、

$$\kappa_n = \left\langle \mathbf{u}_3, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s} \right\rangle = \sum_{i,j=1,2} \left\langle \mathbf{u}_3, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle v^i v^j \tag{67}$$

である。ここで

$$\kappa = \left\langle \mathbf{u}_3, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial (u^1)^2} \right\rangle (du^1)^2 + 2 \left\langle \mathbf{u}_3, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} \right\rangle du^1 du^2 + \left\langle \mathbf{u}_3, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial (u^2)^2} \right\rangle (du^2)^2 \tag{68}$$

を**第二基本形式**と呼ぶ。第二基本形式の係数を行列としてみた時、即ち

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{u}_3, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^1} \right\rangle & \left\langle \mathbf{u}_3, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} \right\rangle \\ \left\langle \mathbf{u}_3, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2 \partial u^1} \right\rangle & \left\langle \mathbf{u}_3, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2 \partial u^2} \right\rangle \end{pmatrix} \tag{69}$$

とすると、法曲率は

$$\kappa_n = \langle \mathbf{v}, \mathcal{K}\mathbf{v} \rangle \tag{70}$$

と表される。

曲面に接する任意の接ベクトル $\mathbf{X} = X^1 \mathbf{u}_1 + X^2 \mathbf{u}_2$ に対して、曲面上の曲線に沿った微分を取ると、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}X^1}{\mathrm{d}s} + X^1 w_1^1 + X^2 w_2^1 \right) \mathbf{u}_1 + \left(\frac{\mathrm{d}X^2}{\mathrm{d}s} + X^1 w_1^2 + X^2 w_2^2 \right) \mathbf{u}_2 + \left(X^1 w_1^3 + X^2 w_2^3 \right) \mathbf{u}_3 \tag{71}$$

となる。今、ベクトル $\mathbf{X}$ の曲線に沿った微分が 0 であるとすると、関係式

$$\frac{\mathrm{d}X^1}{\mathrm{d}s} + X^1 w_1^1 + X^2 w_2^1 = 0 \tag{72}$$

$$\frac{\mathrm{d}X^2}{\mathrm{d}s} + X^1 w_1^2 + X^2 w_2^2 = 0 \tag{73}$$

が得られる。曲面上の接ベクトル $\mathbf{X}$ がこれらの関係式を満たしているとき、$\mathbf{X}$ は曲線に沿って**平行**であるという。ベクトル $\mathbf{X}$ を曲線に沿って動かしていっても、向きや大きさが変わらないという意味で、これらの微分方程式を解いて得られるベクトルを**平行移動**して得られるベクトルと呼ばれる。

2.4 正規直交基底による表示

第一基本形式の係数の行列

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\rangle \end{pmatrix} \tag{74}$$

は対称行列なので対角化することができる。$\mathcal{S}$ を対角化して、さらに単位行列に変換する行列を $\mathcal{A}$ と置く。即ち

$$\mathcal{A}^t \mathcal{S} \mathcal{A} = 1 \tag{75}$$

とする。この $\mathcal{A}$ は一般に直交行列ではないことに注意されたい。しかし、$\mathcal{S}$ を対角化する直交行列 $\mathcal{P}$ とある対角行列 $\mathcal{Q}$ があって、$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q}$ のように書くことができる。ここで右辺の 1 は単位行列である。この時ある θ^1 と θ^2 があって

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{A} \cdot \theta \right) \tag{76}$$

と書けるとすると、線素は

$$(ds)^2 = \left(\theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2\right)(dt)^2 \tag{77}$$

と書ける。また速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ は

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_2 \\
&= \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \\
&= \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{pmatrix}\mathcal{A}\cdot\theta \\
&= \theta^1\mathbf{e}_1 + \theta^2\mathbf{e}_2
\end{aligned} \tag{78}$$

と書ける。ここで $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ は

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{pmatrix}\mathcal{A} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1^t \\ \mathbf{e}_2^t\end{pmatrix} = \mathcal{A}^t\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^t \\ \mathbf{u}_2^t\end{pmatrix} \tag{79}$$

の関係で決まる。ここで

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle & \langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle \\ \langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\rangle & \langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\rangle\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1^t \\ \mathbf{e}_2^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix} \\
&= \mathcal{A}^t\mathcal{S}\mathcal{A} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{80}$$

であるので $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ は正規直交基底となっていることが分かる。逆に正規直交基底 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ を任意に取れば、上記の計算を逆に辿ることができるので第一基本形式の係数の行列 $\mathcal{S}$ は対角化されていることが分かる。

曲面に接する基底ベクトルとして正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を取って計算した場合について。3 つ目の基底ベクトルを $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ と取ることで $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$ で正規直交基底となる。曲線の接ベクトルは

$$\mathbf{e} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 \tag{81}$$

となる。今度は v^1、v^2 は何かのパラメータの微分とは限らない。$\mathbf{e}_i$ の t での微分は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3} w_i^j\mathbf{e}_j \tag{82}$$

のように書ける。ここで $\langle\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i\rangle = 1$ なのでこれを t で微分すると $w_i^i = 0$ が分かる。また $\langle\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\rangle = 0$ $(i \neq j)$ を t で微分すれば $w_i^j + w_j^i = 0$ が得られる。まとめると

$$w_i^i = 0, \quad w_i^j + w_j^i = 0 \;\; (i,j = 1,2,\; i \neq j) \tag{83}$$

となる。従って $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t}$ は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} + v^2w_2^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + v^1w_1^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\sum_{i=1,2} v^iw_i^3\right)\mathbf{e}_3 \tag{84}$$

となる。この場合には測地線の方程式は

$$\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} + v^2 w_2^1 = 0 \tag{85}$$
$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + v^1 w_1^2 = 0 \tag{86}$$

で与えられる。また法曲率 κ_n は

$$\kappa_n = v^1 w_1^3 + v^2 w_2^3 \tag{87}$$

で与えられることが分かる。一方で、法曲率 κ_n は

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \langle \mathbf{v}, \mathcal{K}\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}\theta, \mathcal{K}\mathcal{A}\theta \rangle \\ &= \sum_{i,j=1,2} \mathcal{K}'_{ij}\theta^i\theta^j, \quad \mathcal{K}' = \mathcal{A}^t\mathcal{K}\mathcal{A} \end{aligned} \tag{88}$$

であるので、最初の行と比較することで

$$\begin{pmatrix} w_1^3 \\ w_2^3 \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \tag{89}$$

と表されることが分かる。

$\mathcal{K}$ は、従って $\mathcal{K}'$ は対称行列なので直交変換によって対角化することができる。即ち、ある直交行列 $\mathcal{P}$ があって

$$\mathcal{P}^t\mathcal{K}'\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{P}^t\mathcal{P} = 1 \tag{90}$$

と出来る。κ_1、κ_2 を**主曲率**と呼ぶ。またこの時、

$$K = \kappa_1\kappa_2, \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \tag{91}$$

と置き、K を**ガウス曲率**、H を**平均曲率**と呼ぶ。行列の行列式とトレースがそれぞれ直交変換によって不変なので、次の関係が分かる。即ち

$$K = \det\mathcal{K}', \quad H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathcal{K}' \tag{92}$$

である。(75) より

$$\mathcal{S} = \left(\mathcal{A}\mathcal{A}^t\right)^{-1} \tag{93}$$

の関係があるので、(88) の $\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}'$ の関係から

$$K = \frac{\det\mathcal{K}}{\det\mathcal{S}}, \quad H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathcal{K}\mathcal{S}^{-1}\right) \tag{94}$$

と書けることが分かる。

今、正規直交基底 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ による表示で $\mathcal{K}$ が対角化されているとする。2 つの $\mathcal{K}$ の対角成分 κ_1、κ_2 の両方とも正であるとすると、$\mathbf{e} = v^1\mathbf{e}_1$ の方向の曲線に対して κ_n は正となる。従って $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t}$ の $\mathbf{e}_n$ 成分は正となる。即ち曲線に沿って進むと、$\mathbf{e}$ は $\mathbf{e}_n$ の方向へ向きが変わっていく。$\mathbf{e} = v^2\mathbf{e}_2$ 方向の曲線に対しても同様で $\mathbf{e}$ は $\mathbf{e}_n$ の方向へ向きが変わっていく。即ちどの方向へ進んでも $\mathbf{e}$ は $\mathbf{e}_n$ の方向へ向きが変わっていくことになり、曲面は凸型であることがわかる。一方、κ_1 が正で κ_2 が負の場合には、$\mathbf{e} = v^1\mathbf{e}_1$ 方向の曲線に対しては $\mathbf{e}$ は $\mathbf{e}_n$ の方向へ向きが変わるが、$\mathbf{e} = v^2\mathbf{e}_2$ 方向の曲線に対しては $\mathbf{e}$ は $\mathbf{e}_n$ とは逆の方向に向きが変わることになる。従ってこの場合には曲面が双極型であることが分かる。

2.5　曲率の微分幾何学

今度はこれまでのことを踏まえて、曲面の幾何学を微分幾何の形式で展開する。曲面の接ベクトル場の正規直交基底を $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ として、単位法ベクトルを $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ と取る。1-form を成分に持つベクトル $\mathrm{d}\mathbf{x} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ は基底 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ を用いて表すと、

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \theta^1 \mathbf{e}_1 + \theta^2 \mathbf{e}_2 \tag{95}$$

となる。ここでは θ^1 と θ^2 は共に 1-form である。これらの 1-form を用いて第一基本形式を書くと

$$(ds)^2 = \theta^1\theta^2 + \theta^2\theta^2 \tag{96}$$

で与えられる。第二基本形式は

$$\kappa = \sum_{ij=1,2} \mathcal{K}'_{ij}\theta^i\theta^j \tag{97}$$

で与えられる。$\mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$ の外微分は

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_1 = w_1^2\mathbf{e}_2 + w_1^3\mathbf{e}_3 \tag{98}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_2 = w_2^1\mathbf{e}_1 + w_2^3\mathbf{e}_3 \tag{99}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_3 = w_3^1\mathbf{e}_1 + w_3^2\mathbf{e}_2 \tag{100}$$

と書ける。ここでは w_i^j は 1-form であり、これらは**接続**と呼ばれる。

$\mathrm{d}\mathbf{x}$ の外微分を取れば

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}^2\mathbf{x} \\ &= \left(\mathrm{d}\theta^1 - \theta^2 \wedge w_2^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\mathrm{d}\theta^2 - \theta^1 \wedge w_1^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\theta^1 \wedge w_1^3 + \theta^2 \wedge w_2^3\right)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{101}$$

となる。従って

$$\mathrm{d}\theta^1 - \theta^2 \wedge w_2^1 = 0 \tag{102}$$

$$\mathrm{d}\theta^2 - \theta^1 \wedge w_1^2 = 0 \tag{103}$$

および

$$\theta^1 \wedge w_1^3 + \theta^2 \wedge w_2^3 = 0 \tag{104}$$

が得られる。最初の (102)、(102) を**第一構造式**と呼ぶ。また $\mathrm{d}\mathbf{e}_1$ の外微分を取れば

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}^2\mathbf{e}_1 \\ &= \mathrm{d}\left(w_1^2\mathbf{e}_2 + w_1^3\mathbf{e}_3\right) \\ &= \left(\mathrm{d}w_1^2 - w_1^3 \wedge w_3^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\mathrm{d}w_1^3 - w_1^2 \wedge w_2^3\right)\mathbf{e}_3 - \left(w_1^2 \wedge w_2^1 + w_1^3 \wedge w_3^1\right)\mathbf{e}_1 \end{aligned} \tag{105}$$

となり、各 $\mathbf{e}_i$ の成分が 0 となる。ここで前節の最後の式によれば、

$$\begin{pmatrix} w_1^3 \\ w_2^3 \end{pmatrix} = \mathcal{K}' \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \tag{106}$$

であることが分かるので、$w_i^j = -w_j^i$ に注意して、

$$\begin{aligned} \mathrm{d}w_2^1 &= w_1^3 \wedge w_2^3 \\ &= \det \mathcal{K}' \cdot \theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= K \cdot \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned} \tag{107}$$

であることが分かる。

2.6 ガウス-ボネの定理

引き続き曲面の接ベクトル場の正規直交基底 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$ として、$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ であるとする。曲面上の曲線 C の接ベクトルを $\mathbf{e} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2$ とする。話を簡単にするためにパラメータを曲線の長さ s でとる。s での微分をとると

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s} + v^2 w_2^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s} + v^1 w_1^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\sum_{i=1,2} v^i w_i^3\right)\mathbf{e}_3 \tag{108}$$

となる。これを (51) と見比べると最初の 2 項が曲面の接平面成分、即ち $\kappa_g \mathbf{e}_g$ であることが分かる。

ここで、$\mathbf{e}$ の成分だけをとって $\mathbf{v} = (v^1, v^2)$ なるベクトルを考える。これはベクトル $\mathbf{e}$ を、$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ からなる座標系に固定された座標系から見た時のベクトルである。この座標系から見ると 2.1 平面内の曲線の幾何学で述べたように

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\theta} = \Omega\mathbf{v} \tag{109}$$

と書ける。あるいは s での微分に書き直すと

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)\Omega\mathbf{v} \tag{110}$$

となる。従って $\mathbf{n} = \Omega\mathbf{v}$ との内積を取ると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} &= \left\langle \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s}, \Omega\mathbf{v}\right\rangle \\ &= v^1\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s} - v^2\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s}\end{aligned} \tag{111}$$

と書けることが分かる。一方、$\mathbf{n}$ に対応する曲面の単位接ベクトル $\mathbf{e}_g$ は具体的に書けば

$$\mathbf{e}_g = -v^2\mathbf{e}_1 + v^1\mathbf{e}_1 \tag{112}$$

となる。従って $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}t}$ と $\mathbf{e}_g$ との内積を取ると、また $|\mathbf{e}| = |\mathbf{v}| = 1$ に注意すれば、

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \left\langle \mathbf{e}_g, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s}\right\rangle \\ &= \left(v^1\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s} - v^2\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s}\right) - \left((v^2)^2 + (v^1)^2\right)w_2^1 \\ &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - w_2^1\end{aligned} \tag{113}$$

であることが分かる。これは微分形式で書き表すと

$$w_2^1 + \kappa_g\mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta \tag{114}$$

とも書ける。

さて、今曲面上の曲線 C が滑らかな閉曲線であるとする。この時閉曲線 C に沿って (114) を積分すると

$$\int_C w_2^1 + \int_C \kappa_g\mathrm{d}s = \int_C \mathrm{d}\theta \tag{115}$$

となる。左辺の第一項は閉曲線上の 1-form の積分であるために Stokes の定理が使えて、(107) より

$$\begin{aligned}\int_C w_2^1 &= \int_D \mathrm{d}w_2^1 \\ &= \int_D K\theta^1 \wedge \theta^2\end{aligned} \tag{116}$$

と書ける。ただし D は閉曲線 C で囲まれる曲面内の領域である。右辺はというと $\mathbf{v}$ の閉曲線 C にわたる回転角に等しいので $2\pi n$ の形で書き表される。特に閉曲線 C が自分自身と交わらないならば $n=1$ である。従ってまとめると

$$\int_D K\theta^1\wedge\theta^2+\int_{\partial D}\kappa_g \mathrm{d}s=2\pi \tag{117}$$

が得られる。この関係式を**ガウス-ボネの定理**と呼ぶ。これは一般的な境界を持つ n 次元多様体のガウス-ボネ-チャーンの定理の特殊な場合になっている。

さて今閉曲線 C が多角形のように曲線上のいくつかの点で $\mathbf{v}$ が不連続な場合を考える。そのような点を $c_1,c_2,\cdots,c_m$ とする。その場合には点 c_i では θ が不連続になっている。従って曲線に沿った $\mathrm{d}\theta$ の積分は c_i の前後で点 c_i の外角 $\Delta\theta_i$ だけ正味の加算量が少ないことになる。従って

$$\int_C \mathrm{d}\theta=2\pi-\sum_{i=1}^{m}\Delta\theta_i \tag{118}$$

となる。まとめると、

$$\int_D K\theta^1\wedge\theta^2+\int_{\partial D}\kappa_g \mathrm{d}s=2\pi-\sum_{i=1}^{m}\Delta\theta_i \tag{119}$$

である。

次に曲面が閉曲面、即ち境界がない有界な曲面である場合を考える。この閉曲面全体を D とする。この場合には閉曲面をいくつかの閉曲面 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ に分割する。即ち $D_1,D_2,\cdots,D_n$ は全て互いに重なることがないか、共通の辺を共有して接しているかのいずれかであり、これらの和集合が D となっているとする。各閉曲面 D_i の辺の部分は全て滑らかであるとし、滑らかでない点の数を m_i とする。また、これらの滑らかでない点を頂点と呼ぶことにする。各閉曲面 D_i にガウス-ボネの定理を適用して足し上げる。$K\theta^1\wedge\theta^2$ の積分の和はそのまま閉曲面 D の積分となる。$\kappa_g\mathrm{d}s$ の積分を考える。今 D_i のあるひとつの辺での積分を考えると、他のある D_j のある辺の積分と共通であり、積分の向きが反対となっていることが分かる。分割で生じた全ての辺に対して同様であるので、従って全ての辺で $\kappa_g\mathrm{d}s$ の積分の和をとると 0 となる。従って、すべての D_i に対しての積分の和は

$$\int_D K\theta^1\wedge\theta^2=\sum_{i=1}^{n}\left(2\pi-\sum_{j=1}^{m_i}\Delta\theta_j\right) \tag{120}$$

となる。この右辺を考えてみる。n は閉曲面 D の分割で生じた閉曲面の数に等しい。各 $\Delta\theta_i$ は各面の頂点での外角なので、内角を $\Delta\phi_i$ とすると $\Delta\theta_i=\pi-\Delta\phi_i$ である。分割によって生じた各頂点の数を m とする。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(2\pi-\sum_{j=1}^{m_i}\Delta\theta_j\right) &= 2\pi n-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(\pi-\Delta\phi_j)\\ &= 2\pi n-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\pi+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\Delta\phi_j\end{aligned} \tag{121}$$

ここで右辺最後の式の最後の項は各頂点に関して、頂点を共有する面に対しての内角の和、即ち 2π を全ての頂点に対して足し上げることになるので、

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\Delta\phi_j=2\pi m \tag{122}$$

となる。また右辺の最後の式の第二項に関して、面の頂点はその頂点を持つ 2 つの辺が存在する。従って面の頂点の数は面が持つ辺の数の 2 倍となる。従ってそれを全ての面にわたって足し上げると全ての辺の数 l のちょうど 2 になることが分かる。即ち

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\pi = 2\pi l. \tag{123}$$

これらのことから、まとめると

$$\int_D K\theta^1\wedge\theta^2 = 2\pi\chi, \qquad \chi = n - l + m \tag{124}$$

と書けることが分かる。これも閉曲面の**ガウス-ボネの定理**である。ここで χ は**オイラー数**と呼ばれる。左辺の積分はもちろん閉曲面の分割に依存しないので、オイラー数もまた分割の仕方に依存しない整数となる。