公式集2

TKG

2025年5月2日

目 次

1 INTRODUCTION

このノートでは"公式集"ノートで展開した以下の級数の関係式をいくつか追加する目的で書きました。

2 公式集の続き

"公式集"ノートでいくつかの級数を次のように定義していた。

$$\phi_1(s) = \frac{\sin x}{1^s} + \frac{\sin 2x}{2^s} + \frac{\sin 3x}{3^s} + \frac{\sin 4x}{4^s} + \cdots \tag{1}$$

$$\phi_2(s) = \frac{\sin x}{1^s} - \frac{\sin 2x}{2^s} + \frac{\sin 3x}{3^s} - \frac{\sin 4x}{4^s} + \cdots \tag{2}$$

$$\phi_3(s) = \frac{\sin x}{1^s} + \frac{\sin 3x}{3^s} + \frac{\sin 5x}{5^s} + \frac{\sin 7x}{7^s} + \cdots \tag{3}$$

$$\phi_4(s) = \frac{\sin x}{1^s} - \frac{\sin 3x}{3^s} + \frac{\sin 5x}{5^s} - \frac{\sin 7x}{7^s} + \cdots \tag{4}$$

$$and$$

$$\psi_1(s) = \frac{\cos x}{1^s} + \frac{\cos 2x}{2^s} + \frac{\cos 3x}{3^s} + \frac{\cos 4x}{4^s} + \cdots \tag{5}$$

$$\psi_2(s) = \frac{\cos x}{1^s} - \frac{\cos 2x}{2^s} + \frac{\cos 3x}{3^s} - \frac{\cos 4x}{4^s} + \cdots \tag{6}$$

$$\psi_3(s) = \frac{\cos x}{1^s} + \frac{\cos 3x}{3^s} + \frac{\cos 5x}{5^s} + \frac{\cos 7x}{7^s} + \cdots \tag{7}$$

$$\psi_4(s) = \frac{\cos x}{1^s} - \frac{\cos 3x}{3^s} + \frac{\cos 5x}{5^s} - \frac{\cos 7x}{7^s} + \cdots \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

これらの級数の関数等式を以下のように級数の形で与えていた。

$$\phi_1(1-s)=\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{x^s}+\frac{1}{(2\pi+x)^s}-\frac{1}{(2\pi-x)^s}+\frac{1}{(4\pi+x)^s}-\frac{1}{(4\pi-x)^s}+\cdots\right) \tag{10}$$

$$\phi_2(1-s)=\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{(\pi-x)^s}-\frac{1}{(\pi+x)^s}+\frac{1}{(3\pi-x)^s}-\frac{1}{(3\pi+x)^s}+\frac{1}{(5\pi-x)^s}-\frac{1}{(5\pi+x)^s}+\cdots\right) \tag{11}$$

$$\phi_3(1-s)=\frac{1}{2}\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{x^s}-\frac{1}{(\pi+x)^s}+\frac{1}{(\pi-x)^s}+\frac{1}{(2\pi+x)^s}-\frac{1}{(2\pi-x)^s}+\cdots\right) \tag{12}$$

$$\phi_4(1-s)=\frac{1}{2}\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^s}-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)^s}+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)^s}+\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\pi-x\right)^s}-\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)^s}+\cdots\right)$$

and

$$\psi_1(1-s)=\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{x^s}+\frac{1}{(2\pi-x)^s}+\frac{1}{(2\pi+x)^s}+\frac{1}{(4\pi-x)^s}+\frac{1}{(4\pi+x)^s}+\cdots\right) \tag{13}$$

$$\psi_2(1-s)=-\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{(\pi-x)^s}+\frac{1}{(\pi+x)^s}+\frac{1}{(3\pi-x)^s}+\frac{1}{(3\pi+x)^s}+\frac{1}{(5\pi-x)^s}+\frac{1}{(5\pi+x)^s}+\cdots\right) \tag{14}$$

$$\psi_3(1-s)=\frac{1}{2}\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{x^s}-\frac{1}{(\pi+x)^s}-\frac{1}{(\pi-x)^s}+\frac{1}{(2\pi+x)^s}+\frac{1}{(2\pi-x)^s}+\cdots\right) \tag{15}$$

$$\psi_4(1-s)=\frac{1}{2}\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^s}+\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^s}-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)^s}-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)^s}+\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)^s}+\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\pi-x\right)^s}+\cdots\right) \tag{16}$$

同時にこれらの積分表示を以下のように与えていた。

$$\phi_1(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\sin x}{e^u-2\cos x+e^{-u}}du \tag{17}$$

$$\phi_2(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\sin x}{e^u+2\cos x+e^{-u}}du \tag{18}$$

$$\phi_3(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\sin x(e^u+e^{-u})}{e^{2u}-2\cos 2x+e^{-2u}}du \tag{19}$$

$$\phi_4(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\sin x(e^u-e^{-u})}{e^{2u}+2\cos 2x+e^{-2u}}du \tag{20}$$

and

$$\psi_1(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\cos x-e^{-u}}{e^u-2\cos x+e^{-u}}du \tag{21}$$

$$\psi_2(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\cos x+e^{-u}}{e^u+2\cos x+e^{-u}}du \tag{22}$$

$$\psi_3(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\cos x(e^u-e^{-u})}{e^{2u}-2\cos 2x+e^{-2u}}du \tag{23}$$

$$\psi_4(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\cos x(e^u+e^{-u})}{e^{2u}+2\cos 2x+e^{-2u}}du \tag{24}$$

およびこれらの関数等式の積分表示は

$$\phi_1(1-s) = \sin\frac{\pi}{2}s\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\sinh\{(\pi-x)u\}}{\sinh\pi u}du \tag{25}$$

$$\phi_2(1-s) = \sin\frac{\pi}{2}s\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\sinh xu}{\sinh\pi u}du \tag{26}$$

$$\phi_3(1-s) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}s}{2}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\cosh\{(x-\frac{\pi}{2})u\}}{\cosh\frac{\pi}{2}u}du \tag{27}$$

$$\phi_4(1-s) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}s}{2}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\sinh xu}{\cosh\frac{\pi}{2}u}du \tag{28}$$

$$and$$

$$\psi_1(1-s) = \cos\frac{\pi}{2}s\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\cosh\{(x-\pi)u\}}{\sinh\pi u}du \tag{29}$$

$$\psi_2(1-s) = -\cos\frac{\pi}{2}s\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\cosh xu}{\sinh\pi u}du \tag{30}$$

$$\psi_3(1-s) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}s}{2}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\sinh\{(\frac{\pi}{2}-x)u\}}{\cosh\frac{\pi}{2}u}du \tag{31}$$

$$\psi_4(1-s) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}s}{2}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\cosh xu}{\cosh\frac{\pi}{2}u}du \tag{32}$$

であった。ここではこれらをさらに少しだけ発展した関係式を見出したので記しておく。

以下のように新たに級数を定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1(s) &= \psi_1(s)\cos\frac{\pi}{2}s - \phi_1(s)\sin\frac{\pi}{2}s \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+x\right)}{1^s} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+2x\right)}{2^s} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+3x\right)}{3^s} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+4x\right)}{4^s} + \cdots \qquad (33)\\ \tilde{\psi}_2(s) &= \psi_2(s)\cos\frac{\pi}{2}s - \phi_2(s)\sin\frac{\pi}{2}s \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+x\right)}{1^s} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+2x\right)}{2^s} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+3x\right)}{3^s} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+4x\right)}{4^s} + \cdots \qquad (34)\\ \tilde{\psi}_3(s) &= \psi_3(s)\cos\frac{\pi}{2}s - \phi_3(s)\sin\frac{\pi}{2}s \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+x\right)}{1^s} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+3x\right)}{3^s} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+5x\right)}{5^s} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s+7x\right)}{7^s} + \cdots \qquad (35)\\ \tilde{\phi}_4(s) &= \psi_4(s)\sin\frac{\pi}{2}s + \phi_4(s)\cos\frac{\pi}{2}s \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}s+x\right)}{1^s} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}s+3x\right)}{3^s} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}s+5x\right)}{5^s} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}s+7x\right)}{7^s} + \cdots \qquad (36)\end{aligned}$$

これらに関数等式をあてはめることで

$$\tilde{\psi}_1(1-s) = 2\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s\cos\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{(2\pi-x)^s} + \frac{1}{(4\pi-x)^s} + \frac{1}{(6\pi-x)^s} + \cdots\right) \tag{37}$$

$$\tilde{\psi}_2(1-s) = -2\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s\cos\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{(\pi-x)^s} + \frac{1}{(3\pi-x)^s} + \frac{1}{(5\pi-x)^s} + \frac{1}{(7\pi-x)^s}\cdots\right) \tag{38}$$

$$\tilde{\psi}_3(1-s) = -\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s\cos\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{(\pi-x)^s} - \frac{1}{(2\pi-x)^s} + \frac{1}{(3\pi-x)^s} - \cdots\right) \tag{39}$$

$$\tilde{\phi}_4(1-s) = \Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s\cos\frac{\pi}{2}s\left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^s} - \frac{1}{(\frac{3}{2}\pi-x)^s} + \frac{1}{(\frac{5}{2}\pi-x)^s} - \cdots\right) \tag{40}$$

を得る。これらは $x=0$ の時にはゼータ関数の関数等式と調和している。

積分表示は次のようになる。

$$\tilde{\psi}_1(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty u^{s-1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s + x\right) - e^{-u}\cos\frac{\pi}{2}s}{e^u - 2\cos x + e^{-u}} du \tag{41}$$

$$\tilde{\psi}_2(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty u^{s-1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s + x\right) + e^{-u}\cos\frac{\pi}{2}s}{e^u + 2\cos x + e^{-u}} du \tag{42}$$

$$\tilde{\psi}_3(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty u^{s-1} \frac{e^u\cos\left(\frac{\pi}{2}s + x\right) - e^{-u}\cos\left(\frac{\pi}{2}s - x\right)}{e^{2u} - 2\cos 2x + e^{-2x}} du \tag{43}$$

$$\tilde{\phi}_4(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty u^{s-1} \frac{e^u\sin\left(\frac{\pi}{2}s + x\right) + e^{-u}\sin\left(\frac{\pi}{2}s - x\right)}{e^{2u} + 2\cos 2x + e^{-2u}} du \tag{44}$$

および積分表示の関数等式

$$\tilde{\psi}_1(1-s) = 2\sin\frac{\pi}{2}s\cos\frac{\pi}{2}s \int_0^\infty u^{s-1} \frac{e^{-(\pi-x)u}}{\sinh \pi u} du \tag{45}$$

$$\tilde{\psi}_2(1-s) = -2\sin\frac{\pi}{2}s\cos\frac{\pi}{2}s \int_0^\infty u^{s-1} \frac{e^{xu}}{\sinh \pi u} du \tag{46}$$

$$\tilde{\psi}_3(1-s) = -\sin\frac{\pi}{2}s\cos\frac{\pi}{2}s \int_0^\infty u^{s-1} \frac{e^{-(\frac{\pi}{2}-x)u}}{\cosh \frac{\pi}{2}u} du \tag{47}$$

$$\tilde{\phi}_4(1-s) = \sin\frac{\pi}{2}s\cos\frac{\pi}{2}s \int_0^\infty u^{s-1} \frac{e^{xu}}{\cosh \frac{\pi}{2}u} du \tag{48}$$

を得る。