トポロジー III

TKG

2025年3月5日

目次

1	INTRODUCTION	1
2	ポアンカレ-ホップの定理	1
3	ガウス-ボネ-チャーンの定理	4
4	ガウス-ボネ-チャーンの定理～境界付き多様体の場合～	10
4.1	偶数次元の場合	10
4.2	奇数次元の場合	11
5	疑リーマン多様体のガウス-ボネ-チャーンの定理	12
6	不動点定理	14

1 INTRODUCTION

この note では最初にポアンカレ-ホップの定理を証明し、それからガウス-ボネ-チャーンの定理を証明します。最後に境界を持つ多様体の場合へのガウス-ボネ-チャーンの定理の拡張を行っています。前提とする知識は”幾何のお話”、”トポロジー”、”ゲージ理論”の note あたりの内容及び、多様体論あたりの内容をになります。

2 ポアンカレ-ホップの定理

この章においては多様体 M を境界のない向きの付いたコンパクトな m 次元多様体であるとする。そのような多様体 M 上の非退化なベクトル場 v に対して次の定理が成り立つ。

定理 2.1 (ポアンカレ-ホップの定理)

$$\chi(M) = \sum_{p:v \text{ の } 0 \text{ 点}} \text{sign} \left(\det \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_p \right) \quad (1)$$

ここで v が非退化であるとは v の全ての 0 点 p において

$$\det \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_p \neq 0 \quad (2)$$

であることをいう。

証明はいくつかの段階が必要である。

定義 2.1 多様体 $M, N \subset P$ ($\dim M + \dim N = \dim P$) に対して、ある点 $x \in M \cap N$ における M, N の接ベクトル空間 $T_x M, T_x N$ の直和が x での P の接ベクトル空間 $T_x P$ に等しい、即ち $T_x M \oplus T_x N = T_x P$ である時、 M と N は x で**交叉する**という。特に $\forall x \in M \cap N$ において交叉する時には単に M と N は**交叉する**という¹。

定義 2.2 向き付けられた多様体 $M, N \subset P$ ($\dim M = m, \dim N = n$) が交叉するとする。点 $x \in M \cap N$ に対して、点 x での $T_x P$ の基底として $T_x M$ の向き付けられた基底 $(v_1, \dots, v_m)$ 及び $T_x N$ の向き付けられた基底 $(u_1, \dots, u_n)$ を選んだ時、 x での M と N の**交差数** $I_x(M, N)$ を $T_x P$ の基底 $(v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n)$ が正の向きであれば $+1$ 、負の向きであれば -1 として定義する。この時 M と N の**交差数**を

$$I(M, N) = \sum_{\forall x \in M \cap N} I_x(M, N) \quad (3)$$

で定義する。

さて、ベクトル場 v は $v: M \rightarrow TM$ を定義する。 M の v による像を $v(M)$ と書く。この時 v の任意の 0 点 p は v が非退化であるため、 M と $v(M)$ は交叉する。この時 (1) 式の右辺は M と $v(M)$ の交差数に等しい。実際 $v: M \rightarrow v(M)$ を考えれば、 v の 0 点は v が非退化であるため正則点となっている。従って 0 点において M と $v(M)$ は交叉する。接ベクトルの代わりに余接ベクトル (1-form) で表せば、向き付けられた TM^* の基底 $(dx^1, \dots, dx^m)$ と $Tv(M)^*$ の基底 $(dv^1, \dots, dv^m)$ に対して、 $T(TM)^*$ の基底 $(dx^1, \dots, dx^m, dv^1, \dots, dv^m)$ の向きは $\text{sign} \left(\det \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_p \right)$ であることに注意すれば分かると思う²。

定理 2.2 M を境界のないコンパクトな多様体とする。 $f, g: M \rightarrow P$ ($\dim f(M) = \dim g(M) = m$) に対して $f(M), g(M)$ が共に $N \subset P$ ($\dim N = n, \dim P = m + n$) と交叉する。この時 f と g との間のホモトピー $\varphi_t = \varphi(t, \cdot): M \rightarrow P$ が存在し、任意の t に対して $\varphi_t(M)$ が N と交叉する時、 $I(f(M), N) = I(g(M), N)$ である。

$p \in f(M) \cap N$ とする。この時 $p_t \in \varphi_t(M) \cap N$ に対して $p_0 = p$ であり、 p_t において $\varphi_t(M)$ と N が交叉するものとする。定義により p_t は $\varphi_t(M)$ において正則値である。従って p_t の適当な開近傍 $U_{p_t} \subset \varphi_t(M)$ として、 $\varphi_t^{-1}(U_{p_t})$ が互いに排他的で連結な開集合の族 $\{V_{x_t}\}_{x_t \in \varphi_t^{-1}(p_t)}$ に等しくなるように選べる。 $x \in f^{-1}(p)$ をひとつ任意に選べば、 t を変化させていくに従って x から V_{x_t} を辿っていくことにより道 $l: I \rightarrow I \times M$ ($l(t) = (t, x_t), \varphi(x_t) = p_t$) が得られる。この時 $g(x_1) = p_1$ である。従って $l(I) \subset I \times M$ は 1 次元多様体を成す。後は”トポロジー”note の写像度がホモトピー不変量であることの証明と同様である (“トポロジー”note 参照)。■

定理 2.3 M を境界のないコンパクトな多様体とする。また v を M 上の高々有限個の 0 点のみを持つベクトル場であるとし、 p を v の任意の 0 点とする。各 p の十分に小さい (p 以外の v の 0 点を含まない) 近傍 U_p に対して、 $\cup \{U_p\}_{p: v \text{ の } 0 \text{ 点}}$ の外で v と全く同じで、各 U_p の内部では非退化な 0 点を 1 つ持つようなベクトル場 u が存在する。

v の任意の 0 点 p に対して p の十分近い開近傍 U_p に対して、適当に座標系を選ぶことにより $U_p \simeq \mathbb{R}^m$ ($\dim M = m$) と見なせる。従って U_p 内の局所基底をひとつ固定すれば、 U_p 内では v は $v: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ と見なせる。ここで $n < m$ であるとする、 $v^{-1}(0)$ は $m - n$ 次元領域をなすため、 v が高々有限個の 0 点のみを持つことに反するので $n = m$ である。即ち U_p と $v(U_p)$ は 1 対 1 対応である。ここで開近傍 $D \subset U_p$ を $p \in D, \bar{D} \subset U_p$ であるように任意に選ぶ。”トポロジー”note で触れたようにサードの定理により臨界点からなる集合は測度 0 であるために、 D 内に必ず

¹通常は微分幾何学では $\dim M + \dim N \geq \dim P$ の場合も考慮に入れて、 $T_x M \oplus T_x N = T_x P$ である時に**横断的に交わる**と定義する。この note では議論がシンプルとなるように $\dim M + \dim N = \dim P$ と条件を絞って置いて、横断的に交わるとは区別するために、交叉するという呼び方にした。

²もう少しだけ詳しく説明しておく、 $T_x M^*$ の向き付けられた基底を $(dx^1, \dots, dx^n)$ に取った時、 x の余接ベクトルは $v = a_i dx^i$ で与えられる。従って $T(TM)$ の向き付けられた基底は $(dx^1, \dots, dx^n, da^1, \dots, da^n)$ で与えられる。即ち $\mathbf{a}$ の向きと $\mathbf{x}$ の向きは等しい。従って dv の向きは $\det \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_p$ の符号の正負に従う。

正則点を持つ。 $q \in D$ を任意の正則点とする。 D 内で 1 であり U_p の外で 0 であるような M 上の滑らかな関数 ρ に対して、 $v_1 = v - \rho v(q)$ は U_p の外では v に等しく、 U_p 内には q のみを 0 点に持つ。 しかも q で v_1 は非退化である。 後は各 v の 0 点について同様にして非退化な 0 点を持つベクトル場を構成していけば、 求めるべきベクトル場 u が得られる。 ■

補題 2.1 境界のないコンパクト多様体 M に対して、 $I \times M$ 上のベクトル場 $v = v_t + c\partial_t \in \Gamma(T(I \times M))$ を考える。 ベクトル場 $v_t = (\pi_t)_* v$ が $t = 0, 1$ では非退化であり³、 任意の $t_1 \in I$ では 0 点を高々有限個しか持たないとする。 この時、 任意の t_1 での v_t の 0 点 p で v_t が M 上で非退化であるならば、 $I \times M$ 上での v_t の 0 点からなる集合（これは 1 次元多様体を成す）は p で M と交叉する。 また逆に $I \times M$ 上の v_t の 0 点集合が p で M と交叉するならば、 p で v_1 は M 上で非退化である。

証明は易しいの簡単に述べておく。 ある t において v_t が M 上の 0 点 p で非退化であれば、 v_t の 0 点集合が M と (t, p) で交叉するのは明らかであろう。 ある t において v_t が 0 点 p で退化しているとする。 p を原点とした M 上のある方向ベクトル $\Delta \mathbf{x}$ に対して $\frac{\partial v_t}{\partial \mathbf{x}}(p)\Delta \mathbf{x} = 0$ である。 さて、 今 $I \times M$ 内の (t, p) の十分小さい近傍 U_p に対して $v_t : U_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ が定義される。 この v_t に対しては 0 点集合は U_p 内の 1 次元多様体を成す。 なぜなら $\dim v_t(U_p) = n < m$ ならば v_t の 0 点集合は $m - n + 1 \geq 2$ 次元多様体を成すことになるので、 v_t が M 上に高々有限個の 0 点のみしか持たないことに反する。 従って $\dim v_t(U_p) = m$ である。 即ち v_t の 0 点集合は 1 次元多様体を成す。 今 $\Delta v_t = \frac{\partial v_t}{\partial \mathbf{x}}(p)\Delta \mathbf{x} = 0$ より、 v_t が一定である領域（即ち 0 点集合）の (t, p) での方向ベクトルはこの $\Delta \mathbf{x}$ 方向に等しい。 従って v_1 の 0 点集合は p で交叉しない。 ■

補題 2.2 上の補題の条件を満たすベクトル場 v_t に対して、 $t = t_1$ 及び $t = t_2$ での $v_t : M \rightarrow TM$ に対して M と $v_t|_{t=t_1}(M)$ の交差数と M と $v_t|_{t=t_2}(M)$ の交差数は等しい。 即ち

$$I(M, v_t|_{t=t_1}(M)) = I(M, v_t|_{t=t_2}(M)) \quad (6)$$

である。

上の補題の証明により $v_t : I \times M \rightarrow TM$ の 0 点集合 $\text{Ker} v_t$ は $I \times M$ 内の 1 次元多様体を成すのが分かる。 また、 $t = t_1$ における v_t の任意の 0 点 (t_1, p) に対して、 (t_1, p) を端点とする 1 次元多様体のもう片方の端点が (t_1, q) であるとすれば、 一方からもう一方へ v_t の 0 点集合を TM の局所座標系を座標変換しながら辿っていけば p での $T_p v_t(M)$ の向き $(dp, dv_t(p))$ と q での $T_q v_t(M)$ の向き $(dq, dv_t(q))$ とは逆向きになることが分かる（ここで dp と dq とは同じ向きに揃えているものとする）。 (t_1, p) を端点とする 1 次元多様体のもう片方の端点が (t_2, q) であれば同じ向きになる。 従って証明したいことが得られる。 詳細は”トポロジー”note の写像度がホモトピー不変量であることの証明と同様なので省略する。 ■

定理 2.4 境界のないコンパクト多様体 M 上の 2 つの非退化なベクトル場 v_1, v_2 に対して、 $v_1(p)$ と $v_2(p)$ の線形結合が係数を固定した時に、 高々有限個の点 p においてのみ一次従属となるとする。 この時 $v_1, v_2 : M \rightarrow TM$ の交差数は等しい。 即ち

$$\sum_{p_1: v_1 \text{ の 0 点}} \text{sign} \left(\det \left(\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{x}} \right)_{p_1} \right) = \sum_{p_2: v_2 \text{ の 0 点}} \text{sign} \left(\det \left(\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{x}} \right)_{p_2} \right) \quad (7)$$

³ここで

$$i_t : M \rightarrow I \times M \text{ (射入)}, \quad \pi : I \times M \rightarrow M \text{ (射影)} \quad (4)$$

に対して

$$\pi_t = i_t \circ \pi : I \times M \rightarrow I \times M \quad (5)$$

であり、 $(\pi_t)_*$ は π_t の押し出しである。 詳しくは”トポロジー”note を参照のこと。

である。

ベクトル場 $v = tv_1 + (1-t)v_2$ を考えれば、仮定により v は補題 2.1 の条件を満たす。従って補題 2.2 より明らかである。■

さてこれでポアンカレ-ホップの定理が証明できる。上の定理 2.4 により”トポロジー”note の「多様体の分割」の節で与えたような M 上の滑らかな関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対してベクトル場 $*df$ は非退化な M 上のベクトル場となる。 M 上の任意の非退化なベクトル場 v に対して、 f を変形することにより $*df$ と v が高々有限個の点においてのみ一次従属となると仮定できる。従って $I(M, v(M)) = I(M, *df(M))$ である。さて任意の $*df$ の 0 点 p に対して、適当に p の近傍の局所座標系を取ることに

$$f = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_{\lambda_p}^2 + x_{\lambda_p+1}^2 + \cdots + x_m^2 \quad (8)$$

と書ける。従って

$$\begin{aligned} I_p(M, *df(M)) &= \text{sign} \left(\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right)_p \right) \\ &= (-1)^{\lambda_p} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。”トポロジー”note の「オイラー数」の節の最後の結果によれば、 $(-1)^{\lambda_p}$ を $*df$ の全ての 0 点 p にわたる和はオイラー数 $\chi(M)$ に等しい。従って

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{p: *df \text{ の } 0 \text{ 点}} (-1)^{\lambda_p} \\ &= \sum_{p: *df \text{ の } 0 \text{ 点}} I_p(M, *df(M)) \\ &= I(M, *df(M)) \\ &= I(M, v(M)) \\ &= \sum_{p: v \text{ の } 0 \text{ 点}} \text{sign} \left(\det \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)_p \right) \end{aligned} \quad (10)$$

を得る。

3 ガウス-ボネ-チャーンの定理

n 次元ユークリッド空間 $M = \mathbb{R}^n$ を底空間とし、ファイバーが $F = \mathbb{R}^n$ であるベクトル束を E とする。 E の外積束 $\wedge^* E = \bigoplus_p \wedge^p E$ に対して、 $\wedge^q E$ 値の p -form $\omega \in (\wedge^q E) \otimes \Omega^p(M)$ は、 $\omega_1 \in \Omega^p(M)$ 及び $e_{i_1}, \dots, e_{i_q} \in \Gamma(E)$ を用いて

$$\omega = \omega_1 e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} \quad (11)$$

の形の線形結合として表される。 $(\wedge^* E) \otimes \Omega^*(M) := \sum_{p,q} (\wedge^q E) \otimes \Omega^p(M)$ と書く。以上の定義により $\wedge^* E$ は”経路積分”note で定義しておいたグラスマン束となる。

$\Gamma(E)$ の局所正規直交基 $e_1, \dots, e_n$ に向きを適当に定義する。この時 $(\wedge^* E) \otimes \Omega^*(M)$ 上のグラスマン積分 (Berezin 積分) $\int^B$ を上記のように書ける ω に対して

$$\int^B \omega := \begin{cases} \omega_1 & : q = n, (e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \text{ が正の向き} \\ -\omega_1 & : q = n, (e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \text{ が負の向き} \\ 0 & : q < n \end{cases} \quad (12)$$

と定義する。これも”経路積分”note で定義したグラスマン積分と一致する。しかもこれは定義により $\Gamma(E)$ の局所正規直交基の選び方によらない。以下では特に断らない限り $\Gamma(E)$ の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ を正の向きに並んだ局所正規直交基であるとする。

さて n 次元ユークリッド空間 $M = \mathbb{R}^n$ 上の座標系を $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ と選ぶ。簡単な計算により、 n -form

$$U(\mathbf{x}) = e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (13)$$

に対して

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} U(\mathbf{x}) = 1 \quad (14)$$

が分かる。これより $\mathbf{x} = \sum_i e_i x^i \in \Gamma(E)$ に対して

$$\begin{aligned} \int^B \exp\left(-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2 + d\mathbf{x}\right) &= e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2} \int^B \prod_{i=1}^n (1 + e_i dx^i) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2} \int^B (e_1 dx^1) \wedge \dots \wedge (e_n dx^n) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned} \quad (15)$$

となる。即ち

$$U(\mathbf{x}) = \int^B \exp\left(-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2 + d\mathbf{x}\right) \quad (16)$$

を得る。

さて今度は M を一般的な n 次元多様体であるとする。底空間を M としたファイバーが n 次元のベクトル空間 V である (V が実ベクトル空間の場合には構造群 $G: V \rightarrow V$ は $O(V)$ や $SO(V)$ 、または $GL(V)$ ⁴ などである) ベクトル束を E とする。この場合にも $(\wedge^* E) \otimes \Omega^*(M)$ 上のグラスマン積分が定義出来る。 ∇^E を E 上の接続とする。一般的に言って、ベクトル束 E の構造群 G は $\Gamma(E)$ の局所基底に条件を課したときに、条件を満たす局所基底の間の座標変換により特徴付けられる。この意味でそのような局所基底を**構造群 G を特徴付ける局所基底**と呼ぶ事にする⁵。

補題 3.1 内積の定義されたベクトル束 E に対して $\Gamma(E)$ の、構造群 G を特徴付ける局所基底を $e_1, \dots, e_n$ とする。また E 上の計量 g を保つ接続 ∇^E が定義されているとする。この時、別の G を特徴付ける局所基底への座標変換のもとで不変な、計量 g の関数 $f(g) = a^{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k}} g_{i_1 i_2} \dots g_{i_{2k-1} i_{2k}}$ ($a^{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k}}$ は定数) に対して

$$df(g) = 0 \quad (17)$$

である。また $a = a^{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{2k}}$ に対して

$$\nabla^E a = 0 \quad (18)$$

である。

⁴ $GL(V)$ は V から V への全単射写像全体からなる群である。

⁵例えば $G = O(V)$ であれば、 $\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij}$ を満たす基底の組 (即ち局所正規直交基) であり、 $G = SO(V)$ ならば $e_1, \dots, e_n$ は向きの定義された局所正規直交基である。また $G = GL(V)$ ならば局所基底である。特に V が複素ベクトル空間の場合には $G = O(V) = U(V)$ は $\langle e_i, e_j \rangle = g(e_i^*, e_j) = \eta_{ij}$ により、 $G = SO(V) = SU(V)$ ならばさらに $e_1, \dots, e_n$ に向きが付けられたものにより特徴付けられる。また $G = GL(V)$ は実ベクトル空間と同様に局所基底である。

$a = a^{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{2k}}$ と置けば $f(g) = \underbrace{a(g, \dots, g)}_{k \text{ 個}}$ と書ける。すると

$$df(g) = \sum_{i=1}^k a(g, \dots, \overset{i \text{ 番目}}{\nabla^E g}, \dots, g)[v] + (\nabla^E a)(g, \dots, g)[v] \quad (19)$$

と書ける。第一項目は接続 ∇^E が計量 g を保つので 0 である。今 $f(g)$ が G による座標変換のもとで不変なので a もまた G による座標変換のもとで不変である。そこで座標変換を $e_t = \exp(tM)e$ ($M \in \mathfrak{g}$) と表せば、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_t &= \sum_{i=1}^{2k} a^{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k}} e_{ti_1} \otimes \dots \otimes M_{ij} e_{tj} \otimes \dots \otimes e_{ti_{2k}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

今は M は任意の $\mathfrak{g}$ の元なので、 M の代わりに接続形式 ω ($\nabla^E = d + \omega$) を用いても成立している。これは $\nabla^E a = 0$ を意味している。従ってまた $df(g) = 0$ である⁶。■

この補題により特に計量のパツフィアンに対して $d\text{Pf}(g) = \nabla^E \text{Pf}(g) = 0$ である。また G を $SO(V)$ と選べば $SO(V)$ を特徴付ける局所基底は向きの付いた局所正規直交基である。その場合、 $a = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ と置けば $\nabla^E(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = 0$ が分かる。

再び E を底空間が境界のない向き付けられた n 次元コンパクト多様体 M でファイバーが $F = \mathbb{R}^n$ のベクトル束であるとする。また今度は E に内積が定義されていて計量を g とする。 $\Gamma(E)$ の向きの付いた局所正規直交基を $e_1, \dots, e_n$ とし、 ∇^E を従って計量を保つ接続とする。またこの基底での計量の表示を $\eta_{ij} = \pm 1$ であるとする。

補題 3.2 $\omega \in (\wedge^* E) \otimes \Omega^*(M)$ に対して

$$d \int^B \omega = \int^B \nabla^E \omega \quad (21)$$

である。

$\omega = \omega_1 e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, $\omega_1 \in \Omega^p(M)$ と仮定しても一般性を失わない。この時上述のことより

$$\begin{aligned} \nabla^E \omega &= d\omega_1 e_1 \wedge \dots \wedge e_n + (-1)^p \omega_1 \wedge \nabla^E(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= d\omega_1 e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned} \quad (22)$$

となる。■

ベクトル束 E の局所座標系は、 $\Gamma(E)$ の局所基底 $e_1, \dots, e_n$ を用いて E の元を $v = e_i(x)v^i \in E$ と書いた時 $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$ で与えられる。この時、 $\omega = \omega_1 e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$ ($\omega_1 \in \Omega^p(E)$) に対して縮約 ι_v ($v \in E$) を

$$\iota_v \omega = \sum_j (-1)^{j-1} \langle v, e_j \rangle \omega_1 e_{i_1} \wedge \dots \wedge \overset{j}{\check{\vee}} \wedge e_{i_q} \quad (23)$$

で定義する。また、 E 上の接続 ∇^E を自然に $\nabla^E : (\wedge^* E) \otimes \Omega^*(E) \rightarrow (\wedge^* E) \otimes \Omega^{*+1}(E)$ と考えることが出来る。ここで ∇^E の $(\wedge^* E) \otimes \Omega^*(E)$ への作用は、接続形式を ω とすれば通常通り $\nabla^E e_i = e_j \omega_{ji}$ で定義する。この時次の補題が成り立つ。

⁶この証明は実質的に“ゲージ理論”note の Euler 形式が閉形式であることの証明と同じである。従ってこの議論を計量の代わりに ∇^E の曲率 Ω を用いても同じことが言える。

補題 3.3 内積を持つ実ベクトル束 E の内積を保つ接続を $\nabla^E (= d + \omega)$ とし、その曲率を Ω^E とする。また $B^E \in (\wedge^2 E) \otimes \Omega^2(M)$ を "ゲージ理論" note の Euler 形式の箇所で定義した 2-form、即ち $\Omega_{im}^E \eta_{mj} = B_{ij}^E$ に対して

$$B^E = \frac{1}{2} B_{ij}^E e_i \wedge e_j \quad \left(\in (\wedge^2 E) \otimes \Omega^2(M) \right) \quad (24)$$

であるとする。 B^E は自然に $B^E \in (\wedge^* E) \otimes \Omega^2(E)$ と見なせる。この時 $\mathbf{v} = e_i v^i \in E$ とすれば、

$$A = -\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \nabla^E \mathbf{v} + B^E \quad \left(\in (\wedge^* E) \otimes \Omega^*(E) \right) \quad (25)$$

に対して

$$(\nabla^E + \iota_{\mathbf{v}})A = 0 \quad (26)$$

である。ここで $|\mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ である。

これは順次計算していけば確かめられる。 $\nabla^E A$ の最初の項は、

$$\nabla^E |\mathbf{v}|^2 = 2\iota_{\mathbf{v}} \nabla^E \mathbf{v} \quad (27)$$

となる。第二項目は

$$\begin{aligned} \nabla^E (\nabla^E \mathbf{v}) &= (\nabla^E)^2 \mathbf{v} \\ &= \Omega^E \mathbf{v} \\ &= -\iota_{\mathbf{v}} B^E \end{aligned} \quad (28)$$

となる。ここで最後の等式は e_i の双対基を θ^i として $\Omega^E = e_i \Omega_{ij}^E \theta^j$ であること、また $B_{ij}^E = -B_{ji}^E$ に注意すれば分かる。第三項目は Bianchi の恒等式より 0 となる ("ゲージ理論" note 参照)。以上のことが分かれば等式を確認するのは容易である。 ■

次に上記補題の A を少し変更して

$$A_t = -\frac{t^2}{2} |\mathbf{v}|^2 + t \nabla^E \mathbf{v} + B^E \quad (29)$$

と置く。この時、次の補題が成り立つ。

補題 3.4 E 上の n -form $U_t \in \Omega^n(E)$ を

$$U_t = \int^B e^{A_t} \quad (30)$$

と置けば

$$\frac{d}{dt} U_t = d \int^B \mathbf{v} \wedge e^{A_t} \quad (31)$$

である。この結果は多様体 M とファイバー F の次元が異なる場合でも成立する。

まず

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_t &= \nabla^E \mathbf{v} - t |\mathbf{v}|^2 \\ &= (\nabla^E - \iota_{\mathbf{v}}) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (32)$$

また、この A_t に対しては

$$(\nabla^E + t\iota_{\mathbf{v}})A_t = 0 \quad (33)$$

となる。従ってこれと、 $\frac{dA_t}{dt}$ と A_t が交換すること、また $[\nabla^E, \mathbf{v}] = \nabla^E \mathbf{v}$ 、 $\{\iota_{\mathbf{v}}, \mathbf{v}\} = |\mathbf{v}|^2$ 、及び補題 3.3 より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_t &= \int^B \frac{d}{dt}e^{A_t} \\ &= \int^B (\nabla^E - t\iota_{\mathbf{v}})(\mathbf{v} \wedge e^{A_t}) \\ &= d \int^B \mathbf{v} \wedge e^{A_t} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。最後の等式は補題 3.2 による。■

特に M が n 次元多様体で、ファイバー F が n 次元ベクトル空間の場合には、 $\int^B \mathbf{v} \wedge e^{A_t}$ が $n-1$ -form であることに注意すれば、ストークスの定理より

$$\begin{aligned} \int_M U_{t_1} - \int_M U_{t_0} &= \int_{\partial M} \left(\int_{t_0}^{t_1} dt \int^B \mathbf{v} \wedge e^{A_t} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

となることが分かる。

以上により $\int_M U_t$ は t には依存しない。従って特に n が偶数である場合には $n = 2m$ と置き、 $t = 0$ と置けば

$$\begin{aligned} U_t &= \int^B \exp(B^E) \\ &= \frac{1}{2^m m!} \int^B (B_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge B_{i_{n-1} i_n})(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-1}} \wedge e_{i_n}) \\ &= \frac{1}{2^m m!} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} B_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge B_{i_{n-1} i_n} \int^B e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \text{Pf}(B^E) \end{aligned} \quad (36)$$

を得る。ここで $\text{Pf}(B^E)$ は B^E のパッフイアンである⁷。

補題 3.5 底空間 M 及びファイバー F がともに $n = 2m$ 次元である、ベクトル束 E の異なる 2 つの接続 ∇_0^E, ∇_1^E に対して、ある $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ が存在して

$$\text{Pf}(B_0^E) - \text{Pf}(B_1^E) = d\omega \quad (37)$$

となる。

証明は”ゲージ理論”note の「特性類」の節で計算したものと同様である。念のためここでも証明しておく。 $\nabla_t^E = (1-t)\nabla_0^E + t\nabla_1^E$ と置く。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\text{Pf}(B_t^E) &= \int^B \frac{dB_t^E}{dt} \exp(B_t^E) \\ &= \int^B [\nabla_t^E, \frac{d\nabla_t^E}{dt}] \eta \exp(B_t^E) \\ &= \int^B [\nabla_t^E, \frac{d\nabla_t^E}{dt}] \eta \exp(B_t^E) \\ &= d \int^B \frac{d\nabla_t^E}{dt} \eta \exp(B_t^E) \end{aligned} \quad (38)$$

⁷パッフイアンの定義は”ゲージ理論”note を参照されたい。またこの計算は実質的に”経路積分”note のグラスマン数のガウス積分の計算と同じである。そちらのほうも参照されたい。

従って

$$\text{Pf}(B_0^E) - \text{Pf}(B_1^E) = d \int_0^1 dt \int^B \frac{d\nabla_t^E}{dt} \eta \exp(B_t^E) \quad (39)$$

を得る。■

”ゲージ理論”noteによれば、

$$e(E, \nabla^E) = \frac{1}{(2\pi)^m} \text{Pf}(B^E) \quad (40)$$

を Euler 形式といい、そのコホモロジー類を Euler 類と呼んだ。今、 M が局所正規直交基による表示で計量が $\delta = 1$ となる多様体（リーマン多様体）であるとし、ベクトル束を $E = TM$ に選んだ時、次の定理が成り立つ。

定理 3.1 (ガウス-ボネ-チャーンの定理) $n = 2m$ 次元の境界のない向き付けられたコンパクト多様体 M に対して

$$\chi(M) = \int_M e(TM, \nabla^{TM}) \quad (41)$$

が成り立つ。

証明の前に説明をひとつ付け加える。上記 U_t は $(\wedge^* E) \otimes \Omega^*(E)$ 上で定義されている。従って、ベクトル場 $v : M \rightarrow TM$ による引き戻し $(\frac{1}{2\pi})^m v^* \int^B U_t$ が Euler 形式と等しいと解釈するべきである。

さて、 M 上の非退化なベクトル場を v とする。 v の任意 0 点をひとつ選び p と置く。 p を原点とした、 p のある開近傍 $U_p \simeq \mathbb{R}^n$ 内での適当な局所座標系を x と取る。 $v = e_i v^i$ ($e_i = \partial_i$) は U_p 内で全単射 $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を定義し、

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(p) \cdot \mathbf{x} + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2) \quad (42)$$

と書ける。さて、 M の計量を適当に取り直せば、 U_p 内ではこの局所座標系による表示で

$$g = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 \quad (43)$$

であると仮定できる。従って U_p 内では曲率が 0 であるため、

$$\begin{aligned} \int_M e(TM, \nabla^{TM}) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_M v^* \int^B \exp(A_t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{p:v \text{ の } 0 \text{ 点}} \int_{U_p} v^* \int^B \exp\left(-\frac{t^2}{2} |\mathbf{v}|^2 + t d\mathbf{v}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{M \setminus \cup_p \{U_p\}} v^* \int^B \exp\left(-\frac{t^2}{2} \langle v, v \rangle + t \nabla^{TM} v + B^{TM}\right) \end{aligned} \quad (44)$$

となる。最後の等式の第二項目は $M \setminus \cup_p \{U_p\}$ 内では $\langle v, v \rangle > 0$ であるため $t \rightarrow \infty$ の極限では 0 となる⁸。第一項目に関しては、 p が $v|_{U_p}$ の正則点であることから、この章の最初のほうの計算により、 $t \rightarrow \infty$ において、

$$\begin{aligned} \int_{U_p} v^* \int^B \exp\left(-\frac{t^2}{2} |\mathbf{v}|^2 + t d\mathbf{v}\right) &= t^n \int_{\mathbb{R}^n} v^* \left(\exp\left(-\frac{t^2}{2} |\mathbf{v}|^2\right) dv^1 \wedge \dots \wedge dv^n \right) \\ &= \text{sign}(v)_p \int_{v(\mathbb{R}^n)} U(\mathbf{v}) \\ &= \text{sign} \left(\det \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)_p \right) (2\pi)^m \end{aligned} \quad (45)$$

⁸この項は t の 0 次から n 次までの和の形になるが、最も利いてくるのは t^n 次の項である。しかしこの項も $t \rightarrow \infty$ の極限においては $e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}$ の無限遠方の領域での積分となるため $\rightarrow 0$ となる。

となる。従ってポアンカレ-ホップの定理により定理が示される。■

2次元多様体の場合のガウス-ボネの定理はこの特別な場合として得られる。

(ここで念のために注記しておきます。”トポロジー”noteでも書いたように、境界のないコンパクト多様体の場合にはド・ラームコホモロジー群に対して $H^p(M) = H^{n-p}(M)$ であった。即ち M が奇数次元の場合には $\chi(M) = 0$ である。従って奇数次元の場合にはオイラー類を $e(TM, \nabla^{TM}) = 0$ と定義しておけば、ガウス-ボネ-チャーンの定理は任意の次元に対して成立する。)

4 ガウス-ボネ-チャーンの定理～境界付き多様体の場合～

この章では向きの付いたコンパクトな境界付きリーマン多様体の場合を考える。その場合においてもベクトル場 v を M の内点においてのみ0点を持つ非退化なベクトル場であるとすれば、ポアンカレ-ホップの定理の議論はそのまま成り立つことに注意されたい。修正されるべき箇所は補題3.4以下の箇所である。多様体 M が境界を持つ場合には

$$\int_M v^* U_{t_1} - \int_M v^* U_{t_0} = \int_{\partial M} v^* \left(\int_{t_0}^{t_1} dt \int^B \mathbf{v} \wedge e^{A_t} \right) \quad (46)$$

において右辺は今度は0とはならない。もう一箇所は補題3.5の、接続を取り直すことから来る境界上での積分項であるが、この項に関しては定理3.1の証明において計量を境界 ∂M の近傍ではもとの計量と一致するように取れば ∂M 上では $\frac{d\nabla_t^E}{dt} = 0$ となり、この項からの寄与は生じない。以上により境界を持ったコンパクト多様体の場合のガウス-ボネ-チャーンの定理は

$$\chi(M) = \int_M e(TM, \nabla^{TM}) + \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\partial M} v^* \left(\int_0^\infty dt \int^B \mathbf{v} \wedge e^{A_t} \right) \quad (47)$$

となる。奇数次元の場合には右辺の第一項目は0となる。以下では偶数次元と奇数次元の場合に分けて右辺の第二項目を計算していく。

4.1 偶数次元の場合

境界を持ったコンパクト多様体 M の次元が $n = 2m$ の場合。ベクトル場 v は M の内点のみで0点を持つため、 ∂M 上では $v \neq 0$ である。従って ∂M の各連結成分 $(\partial M)_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) 内において、 v は常に外向きであるか内向きであるかのどちらかである。 $q \in \partial M$ の M 内での近傍 U の局所座標系を

$$\mathbb{R}_-^n := \begin{cases} x = (x^0, \dots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}^n \\ x^0 \leq 0 \end{cases} \quad (48)$$

とする。また ∂M の向きは通常通りに $(x^0, \dots, x^{n-1})$ が正の向きである場合に、 $(x^1, \dots, x^{n-1})$ が正の向きであるように定義する。

さて、 U 内においてのみ v を変形することにより、境界において v が外向きであれば U 内で $v = \frac{\partial}{\partial x^0}$ であり、 v が内向きであれば U 内で $v = -\frac{\partial}{\partial x^0}$ であると仮定できる。 ∂M 上の各点の近傍においてそうであるように変形する。境界積分の項の、 U 内における局所座標系での表示を与えよう。 A_t の三項の内どのふたつも交換するので、また

∂M 上では $|\mathbf{v}|^2 = 1$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dt \int^B \mathbf{v} \wedge e^{A_t} &= \int_0^\infty dt e^{-\frac{t^2}{2}|\mathbf{v}|^2} \int^B \mathbf{v} \wedge e^{t\nabla^{TM}\mathbf{v}} \wedge e^{B^{TM}} \\
&= \sum_{a,b=0} \frac{1}{a!b!} \int_0^\infty dt e^{-\frac{t^2}{2}} \int^B \mathbf{v} \wedge (t\nabla^{TM}\mathbf{v})^b \wedge (B^{TM})^a \\
&= \sum_{a,b=0} \frac{1}{a!b!} 2^{\frac{b}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right) \int^B \mathbf{v} \wedge (\nabla^{TM}\mathbf{v})^b \wedge (B^{TM})^a
\end{aligned} \tag{49}$$

ここで $B^{TM} \in (\wedge^2 TM) \otimes \Omega^2(TM)$ 及び、 $\nabla^{TM}\mathbf{v} \in TM \otimes \Omega^1(TM)$ であるので、 $\int^B$ の被積分関数は $2m = 2a + b + 1$ であるもののみが寄与する。従って b は奇数である。従って接続形式を ω^i_j とすると

$$\begin{aligned}
v^* \left(\sum_{a,b=0} \frac{1}{a!b!} 2^{\frac{b}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right) \int^B \mathbf{v} \wedge (\nabla^{TM}\mathbf{v})^b \wedge (B^{TM})^a \right) \\
= \sum_{2a+b+1=2m} \frac{1}{2^a a! 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots b} \varepsilon_{i_1 \cdots i_b j_1 \cdots j_{2a}} \omega^{i_1}_0 \wedge \cdots \wedge \omega^{i_b}_0 \wedge B_{j_1 j_2}^{TM} \wedge \cdots \wedge B_{j_{2a-1} j_{2a}}^{TM}
\end{aligned} \tag{50}$$

ここで添え字の $i_1, \dots, i_b, j_1, \dots, j_{2a}$ は $1, 2, \dots, n-1$ を取るものとする。従って積分の際には境界 ∂M の向きを通常通りの選び方を取れば、

$$\Phi = \sum_{2a+b+1=2m} \frac{1}{2^a a! 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots b} \varepsilon_{i_1 \cdots i_b j_1 \cdots j_{2a}} \omega^{i_1}_0 \wedge \cdots \wedge \omega^{i_b}_0 \wedge B_{j_1 j_2}^{TM} \wedge \cdots \wedge B_{j_{2a-1} j_{2a}}^{TM} \tag{51}$$

と書けば、

$$\chi(M) = \int_M e(TM, \nabla^{TM}) + \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_\alpha \int_{(\partial M)_\alpha} \Phi \tag{52}$$

となるのが分かる。ここで第二項目の符号は $(\partial M)_\alpha$ で v が外向きであれば +、内向きであれば - を取る。

4.2 奇数次元の場合

$n = 2m + 1$ の奇数次元の場合には (49) において b は偶数である。従って

$$\begin{aligned}
v^* \left(\int_0^\infty dt \int^B \mathbf{v} \wedge e^{A_t} \right) &= v^* \left(\sum_{a,b=0} \frac{1}{a!b!} 2^{\frac{b}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right) \int^B \mathbf{v} \wedge (\nabla^{TM}\mathbf{v})^b \wedge (B^{TM})^a \right) \\
&= \sum_{2a+b=2m} \frac{1}{a! 2 \cdot 4 \cdots b} \sqrt{\frac{\pi}{2}} v^* \int^B \mathbf{v} \wedge (\nabla^{TM}\mathbf{v})^b \wedge (B^{TM})^a \\
&= \frac{1}{m!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} v^* \int^B \mathbf{v} \wedge \sum_{a+\beta=m} \frac{m!}{a!\beta!} (B^{TM})^a \wedge \left(\frac{1}{2} (\nabla^{TM}\mathbf{v})^2 \right)^\beta \quad (b = 2\beta) \\
&= \frac{1}{m!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} v^* \int^B \mathbf{v} \wedge \left(B^{TM} + \frac{1}{2} (\nabla^{TM}\mathbf{v})^2 \right)^m \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} v^* \int^B \mathbf{v} \wedge \exp \left(B^{TM} + \frac{1}{2} (\nabla^{TM}\mathbf{v})^2 \right) \\
&= \pm \frac{1}{2^m m!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\varepsilon_{i_1 \cdots i_{2m}} (i^* B^{TM})_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge (i^* B^{TM})_{i_{2m-1} i_{2m}} \right)
\end{aligned} \tag{53}$$

と表されるものとする。向き付けられた境界のないコンパクトな擬リーマン多様体の場合にも 3 節のガウス-ポネチャーンの定理 3.1 の証明と同様の議論が行える。即ち、”解析の話発展変”note で導いた最後の等式より

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{\pm ix} dx = \Gamma(s) e^{\pm i\frac{\pi}{2}s} \quad (60)$$

が得られるが、これより $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\frac{\alpha}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha|}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\text{sign}(\alpha)\right) \quad (61)$$

従って

$$U(\mathbf{x}) := \exp\left(-\frac{i}{2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (62)$$

に対して

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} U(\mathbf{x}) = \exp\left(i\frac{\pi}{4}(2\lambda - n)\right) \quad (63)$$

となる。従って

$$A_t = -\frac{t^2}{2}|\mathbf{v}|^2 + t\nabla^E \mathbf{v} + B^E \quad (64)$$

とすれば

$$U_t := \int^B e^{iA_t} \quad (65)$$

はリーマン多様体の時と同様に t に依存しない。 n が偶数である場合には $n = 2m$ と置き、 $t = 0$ と置けば

$$U_t = i^m \text{Pf}(B^E) \quad (66)$$

を得る。3 節同様の議論を行うことにより

$$\begin{aligned} i^m \int_M e(TM, \nabla^{TM}) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_M v^* \int^B \exp(iA_t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{p:v \text{ の } 0 \text{ 点}} \int_{U_p} v^* \int^B \exp\left(-i\frac{t^2}{2}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + itd\mathbf{v}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{M \setminus \bigcup_p \{U_p\}} v^* \int^B \exp\left(-i\frac{t^2}{2}\langle v, v \rangle + it\nabla^{TM}v + iB^{TM}\right) \end{aligned} \quad (67)$$

ここで第二項目は $t \rightarrow \infty$ の極限において、 $\rightarrow 0$ となる。第一項目は

$$\begin{aligned} \int_{U_p} v^* \int^B \exp\left(-i\frac{t^2}{2}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + itd\mathbf{v}\right) &= (it)^n \int_{\mathbb{R}^n} v^* \left(\exp\left(-i\frac{t^2}{2}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle\right) dv^1 \wedge \cdots \wedge dv^n\right) \\ &= i^{2m} \text{sign}(v)_p \int_{v(\mathbb{R}^n)} U(\mathbf{v}) \\ &= \text{sign}\left(\det\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\right)_p\right) (2\pi)^m i^{m+\lambda} \end{aligned} \quad (68)$$

従って、

$$\chi(M) = i^{-\lambda} \int_M e(TM, \nabla^{TM}) \quad (69)$$

が得られる。ここでオイラー数 $\chi(M)$ および右辺の積分はともに整数であるので、 λ が奇数の場合にはオイラー数は 0 でないといけないことが分かる。即ち次の定理を得る。

定理 5.1 向き付けられた境界のないコンパクトな偶数次元の疑リーマン多様体 M の局所正規直交基底を用いた時の計量の表現が (59) で与えられた時、 -1 の成分の個数が奇数であるとき、疑リーマン多様体 M のオイラー数 $\chi(M)$ は 0 に等しい。

計量の -1 の成分の個数 λ が偶数の時、 $\lambda = 2\sigma$ と表せば、疑リーマン多様体のガウス-ボネ-チャーンの定理は次のように表される。

定理 5.2 (疑リーマン多様体のガウス-ボネ-チャーンの定理) 向き付けられた境界のないコンパクトな偶数次元の疑リーマン多様体 M の局所正規直交基底を用いた計量の表現 (59) に対して、 -1 の成分の個数が 2σ 個である時、

$$\chi(M) = (-1)^\sigma \int_M e(TM, \nabla^{TM}) \quad (70)$$

が成り立つ。

6 不動点定理

ポアンカレホップの定理 2.1 の証明の最終部分を考慮すると、向きの付いたコンパクトな多様体 M に 0 点を持たないベクトル場 v が存在した場合、必然的に

$$\chi(M) = I(M, v(M)) = 0 \quad (71)$$

となり、オイラー数が 0 となることが導かれる。証明の流れとしては $v_t = tv + (1-t)df$ を取って補題 2.1、補題 2.2、定理 2.4 を追うと良い。

補題 6.1 向きの付いたコンパクト多様体 M に 0 点を持たないベクトル場 v が存在するならば、オイラー数 $\chi(M) = 0$ である。逆に向きの付いたコンパクト多様体 M のオイラー数が 0 でないならば M 上のベクトル場 v は必ず 0 点を持つ。

これにより不動点定理が得られる。

定理 6.1 (不動点定理) 向きの付いたコンパクト多様体 M の自身への同相写像 $\varphi : M \rightarrow M$ と恒等写像 $1 : M \rightarrow M$ とのホモトピー φ_t が存在し、 φ_t の微分が t に依存しないベクトル場を定める時、 M のオイラー数が 0 でないならば $\varphi(p) = p \in M$ なる点 p (不動点) が存在する。

証明は次の通り。ホモトピーを $\varphi_t : M \rightarrow M$ ($t \in [0, 1]$) とした時、 M の各点 p に対して $\varphi_t(p)$ の t での微分は M のベクトル場 v を定義する。今、 v の 0 点が存在しないならば上記の補題よりオイラー数 $\chi(M) = 0$ となる。従ってオイラー数が 0 でないならば v は必ず 0 点を持つ。 v の 0 点を p とすると、 v は t に依存しないために、任意の t に対して $\varphi_t(p) = p$ である。従って p が求めるべき不動点である。■