

2^n の先頭の数字を対数で追ってみました

りつ

2026 年 8 月 3 日

目次

1	きっかけ	1
2	小数部分を見ればよい	1
3	先頭がそれぞれの数字になる範囲	2
4	実際に数えてみる	2
5	ベンフォードの法則	3

1 きっかけ

対数の問題で、 2^{100} が何桁かを求めました。常用対数を使うと桁数が出ることは分かったのですが、計算している途中で 2^n の先頭の数字も対数から分かるのではないかと思いました。

2^n を小さい順に書くと、先頭は

2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, ...

となります。2, 4, 8 の繰り返しではなく、7 や 9 はなかなか出てきません。どの数字も同じくらい出るのか気になったので調べました。

2 小数部分を見ればよい

$\alpha = \log_{10} 2$ とおきます。 $n\alpha$ の整数部分を m 、小数部分を r とすると、

$$n\alpha = m + r \quad (0 \leq r < 1) \quad (1)$$

と書けます。両辺を 10 の指数にすると

$$2^n = 10^{n\alpha} \quad (2)$$

$$= 10^{m+r} \quad (3)$$

$$= 10^m \times 10^r \quad (4)$$

です。

$1 \leq 10^r < 10$ なので、 10^r の整数部分が 2^n の先頭の数字になります。整数部分の m は桁数を決め、小数部分の r は先頭の数字を決めていました。

たとえば $n = 10$ なら

$$10 \log_{10} 2 = 3.010299 \dots \quad (5)$$

です。小数部分だけを使うと

$$10^{0.010299 \dots} = 1.024 \dots \quad (6)$$

となるので、 2^{10} の先頭は 1 です。実際に $2^{10} = 1024$ です。

3 先頭がそれぞれの数字になる範囲

先頭が d になるのは、

$$d \leq 10^r < d + 1 \quad (7)$$

のときです。常用対数を取ると

$$\log_{10} d \leq r < \log_{10}(d + 1) \quad (8)$$

となります。

この区間の長さは

$$\log_{10}(d + 1) - \log_{10} d = \log_{10} \left(\frac{d + 1}{d} \right) \quad (9)$$

です。数字ごとに計算すると次のようになりました。

先頭の数字 d	r の範囲	区間の長さ
1	$0 \leq r < \log_{10} 2$	$0.3010 \dots$
2	$\log_{10} 2 \leq r < \log_{10} 3$	$0.1761 \dots$
3	$\log_{10} 3 \leq r < \log_{10} 4$	$0.1249 \dots$
4	$\log_{10} 4 \leq r < \log_{10} 5$	$0.0969 \dots$
5	$\log_{10} 5 \leq r < \log_{10} 6$	$0.0792 \dots$
6	$\log_{10} 6 \leq r < \log_{10} 7$	$0.0669 \dots$
7	$\log_{10} 7 \leq r < \log_{10} 8$	$0.0580 \dots$
8	$\log_{10} 8 \leq r < \log_{10} 9$	$0.0512 \dots$
9	$\log_{10} 9 \leq r < 1$	$0.0458 \dots$

先頭が 1 になる範囲は全体の約 30% もありますが、9 の範囲は約 4.6% しかありません。最初に 7 や 9 がなかなか出ないと思ったのは、偶然ではなさそうです。

4 実際に数えてみる

$\log_{10} 2 = 0.301029995\dots$ を表計算に入れて、 $n \log_{10} 2$ の小数部分から $n = 1$ から 100 までの先頭を数えました。

先頭の数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
回数	30	17	13	10	7	7	6	5	5

前の表の区間の長さを 100 倍した数とかなり近くなりました。そこで「 $n \log_{10} 2$ の小数部分は、0 から 1 の間にだいたい均等に散らばるのではないか」と考えました。

まず、同じ小数部分が周期的に繰り返すことはありません。もし $\log_{10} 2$ が有理数で、 $\log_{10} 2 = p/q$ と書けたとすると

$$10^p = 2^q \quad (10)$$

となります。しかし左辺には素因数 5 があり、右辺にはないので、これは成り立ちません。したがって $\log_{10} 2$ は無理数です。

ただ、無理数だから同じ場所に戻らないことと、均等に散らばることは別の話です。ここから先を調べると、無理数 α に対する $n\alpha$ の小数部分が均等に分布するという定理があることを知りました。証明にはフーリエ解析を使う方法などが出てきて、そこまでは追えていません。

この定理を使えば、先頭が d になる割合は

$$\log_{10} \left(\frac{d+1}{d} \right) \quad (11)$$

に近づくことになります。

5 ベンフォードの法則

先頭の数字が一樣ではなく、1 が約 30% になる分布には、ベンフォードの法則という名前が付いていました。

今回は 2^n だけを調べましたが、資料を見ると人口や金額などのデータにも現れると書かれていました。どんな数の集まりでも成り立つわけではなく、身長のように範囲が狭いものや、番号として付けた数字には当てはまらないそうです。

2^n では対数の小数部分から分布が出ましたが、現実のデータでも同じ式になる理由はまだ分かりません。同じ形の表が出てくるのは面白いので、もう少し調べたいです。