# 場の量子論

TKG

2025 年 3 月 5 日

## 目 次

**1 INTRODUCTION** **3**

**2 場の古典論** **3**

2.1 汎関数微分 . . . . . 4
2.2 場の古典論 . . . . . 4

**3 場の量子論** **8**

3.1 自由実スカラー場 . . . . . 8
3.2 複素スカラー場 . . . . . 11
3.3 汎関数積分による量子化 . . . . . 14
3.4 S matrix . . . . . 15
3.5 相互作用 . . . . . 16
3.6 Euclid 時空 . . . . . 18
3.7 Feynman rule . . . . . 20
3.8 真空のエネルギー . . . . . 25
3.9 質量への量子補正 . . . . . 27
3.10 繰り込みの前に . . . . . 28
3.11 繰り込み . . . . . 30
3.12 有効作用 . . . . . 38
3.13 対称性 . . . . . 38
3.13.1 対称性とは . . . . . 38
3.13.2 ネーターの定理 . . . . . 39
3.13.3 Ward-高橋の関係式 . . . . . 40
3.13.4 自発的対称性の破れ . . . . . 41
3.13.5 ゴールドストーンの定理 . . . . . 42
3.13.6 演算子法によるゴールドストーンの定理の導出 . . . . . 45
3.14 共鳴 . . . . . 46

**4 フェルミオン** **47**

4.1 Dirac フェルミオン . . . . . 47
4.2 Weyl フェルミオン . . . . . 48
4.3 マヨラナフェルミオン . . . . . 49

4.4 Dirac 方程式 . . . 49
4.5 フェルミオンの量子論 . . . 52
4.6 フェルミオンの汎関数積分による量子化 . . . 55
4.7 フェルミオンの Feynman rule . . . 56
4.8 湯川ポテンシャル . . . 57

**5 ゲージ対称性** **58**
5.1 QED . . . 58
5.1.1 ゲージ場 . . . 58
5.1.2 電磁場の量子論 . . . 60
5.1.3 汎関数積分による量子化 . . . 63
5.1.4 クーロンポテンシャル . . . 65
5.1.5 Ward-高橋の関係式 . . . 66
5.1.6 QED の繰り込み . . . 67
5.2 非可換ゲージ理論 . . . 71
5.2.1 ゲージ場 . . . 71
5.2.2 汎関数積分による量子化 . . . 72
5.2.3 BRST 対称性 . . . 74
5.2.4 カレントの保存について . . . 77
5.2.5 ユニタリティ . . . 78
5.2.6 非可換ゲージ理論の繰り込み . . . 79

**6 アノマリー** **87**
6.1 ABJ アノマリー . . . 87
6.2 ゲージアノマリー . . . 90

**7 素粒子論** **92**
7.1 素粒子論 . . . 93
7.2 クオークモデル . . . 93
7.3 電弱相互作用 . . . 94
7.3.1 レプトン . . . 94
7.3.2 クオーク . . . 96
7.3.3 Higgs 場 . . . 97
7.3.4 湯川相互作用 . . . 99
7.3.5 フェルミ相互作用 . . . 99
7.3.6 ゲージアノマリー . . . 100
7.3.7 世代構造 . . . 101
7.4 量子色力学 . . . 101

**A プロパゲータの積分の計算** **102**

**B フェルミオンがある場合の便利な公式** **103**

**C** $SU(N)$ **104**
C.1 固有値について . . . . . 104
C.2 代数 . . . . . 106
C.3 表現 . . . . . 108

# 1 INTRODUCTION

場の量子論のお話になります。まず最初に場の古典論の復習を少しだけ触れています。それから場の量子論の話に移行する流れで書いています。このノートを読みこなすには複素解析やゲージ理論あたりの知識が必要かもです。また物理に関しては、解析力学、電磁気学、量子力学などは理解していると理解がしやすいと思います。

この note において一番の目的は場の量子論、素粒子論の数学的理論構造を明確にしたいということである。反面、完全な素粒子論についての教科書を目指しているわけではない。それは筆者の力量を超えるからというのが一番の理由ではあるが、他にもこの note の目標とすることろはあくまでも場の量子論の一般的理論について説明することが趣旨であるという理由もある。素粒子論の教科書自体は世の中にたくさんありふれているので物理的なことを詳しく勉強したい方はそれらを参照してもらいたい。それよりもたいがいの場の量子論、素粒子論の教科書では必ずしも明瞭ではなかったりする数学的な理論的構造を明確にすることに念頭を置いてこの note を書こうと思う。とは言っても多くの部分において既存の教科書を大いに参考にしているのであるが。数学的、論理的に明瞭な説明を好む読者にとってはいくらか読みやすいものになっていることを願う。物理を専門にやってない数学方面の方たちにとってもとっつきやすいものになっていれば幸いである。

# 2 場の古典論

まず場の説明から始める。物理において場とは一言でいえば、空間の関数として表される物理量である。例えば、流体力学において、流体の速度ベクトルなどは場である。また電磁気学においては、電場、磁場、電流ベクトルなどは場である。これらの例では、場がベクトルとして与えられるので、ベクトル場という。また、場としてスピノールが与えられれば、スピノール場といわれる。これはフェルミオンを表す時に現れる。成分が 1 つだけの、つまりは空間の単なる関数として表される物理量はスカラー場といわれる。数学的な言葉で言い表せば、もっと簡単で、場とはファイバー束の切断であったり、接続であったりする。例えば接続はベクトル場である。

以下で説明するにあたり、notation を述べておく。時空を $M$ で書くことにする。時空は向きづけ可能な 4 次元多様体である。計量は局所正規直交基による表示で

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

とする。即ち $M$ は 4 次元のローレンツ多様体である（ローレンツ多様体の定義は”ゲージ理論”note 参照のこと）。時空の局所座標系を表す添え字を $\mu, \nu, \rho, \sigma, \cdots$ などで表す。これらの添え字は $0, 1, 2, 3$ にわたる。特に $i, j, k, l, \cdots$ などで時空の空間部分の $1, 2, 3$ を表すとする。場の成分を表す添え字は $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ などで表す。これらの添え字は場の成分の数だけ取りうる。計量は、一般に $g_{\mu\nu}$ で、その逆行列を $g^{\mu\nu}$ で表す。$\det g_{\mu\nu} = g$ と書く。よって $\det g^{\mu\nu} = g^{-1}$ である。体積要素は局所座標系表示で $\sqrt{-g}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ である。$M$ がローレンツ多様体なので $g < 0$ となることに注意。また物理での通例の通りに、$M$ がコンパクトでない場合には、関数は原則的に”無限の遠方”において 0 に恒等的に近づくものとする。この意味は詳しくは”トポロジー”note を参照。また場の量子論で取られる標準的な単位系 $\hbar = c = 1$ とする。

## 2.1 汎関数微分

関数の関数、即ち関数全体からなる集合を $C$ で書くと、$F : C \to \mathbb{C}$ を汎関数という。汎関数微分は

$$\frac{\delta F}{\delta f(y)} := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(f + \varepsilon\delta(x-y)) - F(f)}{\varepsilon} \tag{2}$$

で与えられる。例えば

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \int_a^b f(t)dt = \begin{cases} 0 & x < a \text{ または } b < x \\ 1 & a < x < b \end{cases} \tag{3}$$

となる。この定義はそのまま $C$ 自体にも定義出来る。

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \tag{4}$$

となる。

## 2.2 場の古典論

物理はラグランジアンから始まる。場の理論の場合にはラグランジアンは場の関数で表される。場を $\phi_\alpha$ で表す。$\phi_\alpha$ はスカラー場であったり、ベクトル場であったりである。ただしここではフェルミオン、即ちスピノール場は除いておく。スピノール場はグラスマン数値関数となるので、取り扱いが異なるからである。スピノール場の場の古典論は後で説明する。ここでは要するにボソンだけを扱うことにする。ボソンの場をまとめて $\phi_\alpha$ で表す。この時ラグランジアン密度は、場と場の 1 階微分の関数

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_\alpha, \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\mu}) \quad (\text{もしくは } \mathcal{L}(\phi_\alpha, d\phi_\alpha) \text{ である})$$

で与えられ、ラグラジアン、もしくは作用はこの作用積分

$$S = \int_M *\mathcal{L} \tag{5}$$

で与えられる。ここで $*$ は Hodge 作用素である。$\phi_\alpha$ についての変分 $\phi_\alpha \to \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha$ を取ると、ラグランジアン密度の変化 $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ とすると

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)}\partial_\mu(\delta\phi_\alpha) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\right)\right]\delta\phi_\alpha + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\delta\phi_\alpha\right] \end{aligned} \tag{6}$$

となる。オイラー・ラグランジュ方程式は作用がこの変分のもと、不変であるという条件で表される。即ち、上の変分において、全微分はストークスの定理により消える。よって

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\right) = 0 \tag{7}$$

がオイラー・ラグランジュ方程式、即ち場の運動方程式である。

場の正準運動量は

$$\pi_\alpha(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_\alpha)} \tag{8}$$

で与えられる。エネルギー密度は

$$\mathcal{H} := \pi_\alpha \partial_0 \phi_\alpha - \mathcal{L} \tag{9}$$

で与えられる。これの 3 次元領域での積分は、その領域内の場のエネルギーを与える。

次にエネルギー、運動量テンソルの説明をする。その前にそれらの計算に必要な一般的な計算をいくつか行っておく。行列 $M = (M_{ij})_{ij}$, $(\det M \neq 0)$ に対し、

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} M_{11} & \cdots & \acute{M}_{1i} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & \cdots & \acute{M}_{2i} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & \acute{M}_{ni} & \cdots & M_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_\mu \frac{\partial \det M}{\partial M_{\mu i}} \acute{M}_{\mu i} \end{aligned} \tag{10}$$

より、$M$ の逆行列を $M^{-1} = (M^{ij})_{ij}$ と書けば、

$$\begin{aligned} M^{ij} &= \frac{1}{\det M} \frac{\partial \det M}{\partial M_{ji}} \\ &= \frac{\partial}{\partial M_{ji}} \ln \det M \end{aligned} \tag{11}$$

となる。従って簡単な計算により、また計量が対称行列であることに注意すれば、

$$\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \tag{12}$$

が得られる。また

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det M}{\partial M^{ij}} &= \frac{\partial}{\partial M^{ij}} [(\det M^{-1})^{-1}] \\ &= -\frac{1}{(\det M^{-1})^2} \frac{\partial \det M^{-1}}{\partial M^{ij}} \\ &= -\frac{M_{ji}}{\det M^{-1}} \\ &= -M_{ji} \det M \end{aligned} \tag{13}$$

即ち

$$\begin{aligned} M_{ij} &= -\frac{1}{\det M} \frac{\partial \det M}{\partial M^{ji}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial M^{ji}} \ln \det M \end{aligned} \tag{14}$$

従って

$$\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \tag{15}$$

を得る。これらを使いエネルギー運動量テンソルを直接計算出来る。エネルギー運動量テンソルは一般には作用の計量 $g^{\mu\nu}$ での変分により得られる（一般的にベクトル場や接続などは”下付きの添え字”にて定義される。従って”上

付きの添え字”の場は $g^{\mu\nu}$ で添え字を上げたものである。このとこから $g^{\mu\nu}$ での変分を取るのがよい)。即ち

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left[\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})}\partial_\rho(\delta g^{\mu\nu})\right] d^4x \\ &= \int \left[\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})}\right)\right]\delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= -\int \frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned} \tag{16}$$

従って、エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は

$$\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu} = -\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \partial_\rho\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})}\right) \tag{17}$$

もしくは

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})}\right)\right] \tag{18}$$

を計算することで与えられる。ここでエネルギー・運動量テンソルの第 2 項目は重力場を表すラグラジアンでない場合には、ラグラジアンは計量の微分を含まないので、重力場以外の場のエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{19}$$

となる。以上の定義は対称なエネルギー・運動量テンソルを求める方法である。もうひとつの方法は対称テンソルではないが、保存則が自明なテンソルを求める方法である。それは計量での変分を取る代わりに、局所座標系での変分を取る方法である。即ち

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha} + \frac{\partial(\partial_\nu\phi_\alpha)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_\alpha)} \\ &= \partial_\mu\phi_\alpha\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_\alpha)}\right) + \partial_\mu\partial_\nu\phi_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_\alpha)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\partial_\mu\phi_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_\alpha)}\right)\end{aligned} \tag{20}$$

から（2 段目の等式はオイラー・ラグランジュ方程式による)、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(\delta^\nu_\mu\mathcal{L})}{\partial x^\nu} \tag{21}$$

と書けるので

$$T^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu\mathcal{L} - \partial_\mu\phi_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_\alpha)} \tag{22}$$

と置けば

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}T^\nu{}_\mu = 0 \tag{23}$$

が得られる。これもエネルギー・運動量テンソルという。最初に求めたものとは全く異なるが、これらの差は実は全微分だけの違いである（即ち $dD$ の差だけ)。実際にはどちらがよいというわけではないが、後者のほうが物理的な意味が見やすい。即ち (22) の 00 成分は時空が flat な場合には

$$T^{00} = \partial_0\phi_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_\alpha)} - \mathcal{L} \tag{24}$$

となり、これはエネルギー密度である。また $0i$ $(i=1,2,3)$ 成分は

$$T^{0i} = -\partial_i \phi_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_\alpha)} \tag{25}$$

となる。これは運動量密度（正準運動量ではない）と呼ばれる。ある時刻での 3 次元空間全体を含む超局面 $S$ での積分

$$P^\mu = \int_S \sum_\nu (-1)^\nu T^{\nu\mu} dx^0 \wedge \overset{\nu}{\overset{\vee}{\cdots}} \wedge dx^3 \tag{26}$$

が保存則を満たすからである（この保存則は微分形式の言葉で書くなら 1-form $P^\mu := T^\mu_{\ \nu} dx^\nu$ 及び、$D$ をある 4 次元の領域とすると $\int_{\partial D} *P^\mu = \int_D d * P^\mu = 0$ で表される。また超局面として $x^0 =$ 一定 の超局面 $\mathbb{R}^3$ をとると $\int_{\mathbb{R}^3} *P^0 = \int_{\mathbb{R}^3} T^{00} d^3x$ となり、エネルギーである)。即ち (25) はエネルギーの流れを表している。それはつまり運動量である。運動量の流れは $T^{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=1,2,3)$ である。これらは応力テンソルといわれる[1]。

具体的に時空が flat な場合のスカラー場について、以上で与えた物理量を計算してみる。実スカラー場の最も簡単な形の（即ち相互作用がない）ラグラジアン密度は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2) \qquad \left(\text{微分形式で表せば} * \mathcal{L} = -\frac{1}{2}(d\phi \wedge *d\phi + m^2 * \phi^2)\right) \tag{32}$$

で与えられる。正準共役な運動量は

$$\pi = \partial_0 \phi \tag{33}$$

である。エネルギー密度 $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}((\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) \tag{34}$$

となる。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$(-\partial^2 + m^2)\phi = 0 \tag{35}$$

で与えられる。ここで $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$ である。これはクライン-ゴルトン方程式といわれる。エネルギー・運動量テンソルは

$$T^\nu_\mu = \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu (\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + m^2 \phi^2) \tag{36}$$

となる。

---

[1]補足すると、一般にエネルギー・運動量テンソルは

$$\begin{pmatrix} W & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ S_2 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ S_3 & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{27}$$

の形で与えられる。$W$ はエネルギー密度であり、$S_i$ は運動量密度である。1-vector のエネルギー流ベクトル、運動量流ベクトルを

$$\begin{aligned} w &= W\partial_0 + S_i\partial_i \\ &= W\partial_0 + S \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} p_i &= S_i\partial_0 + \sigma_{ij}\partial_j \\ &= S_i\partial_0 + \sigma_i \end{aligned} \tag{29}$$

と置くと（電磁力学の場合には $S$ はポインティングベクトルともいわれる。また $\sigma_{ij}$ は応力テンソルである）

$$d^\dagger w = dx^0 \wedge (\partial_0 {}^*W + d^*S) = 0 \tag{30}$$

$$d^\dagger p_i = dx^0 \wedge (\partial_0 {}^*S_i + d^*\sigma_i) = 0 \tag{31}$$

を満たす（記号の意味は”幾何のお話”note 参照)。第 1 式はエネルギーの時間変化が運動量の流れで表されることを意味し、第 2 式は運動量の時間変化（即ち力）が応力により与えられることを意味している。

# 3　場の量子論

## 3.1　自由実スカラー場

まず簡単な自由（即ち相互作用のない）実スカラー場の量子論を説明する。場の量子化は、”経路積分”note で説明した調和振動子の形式で行われる。即ち、場をフーリエ積分で表した時の各モードを生成消滅演算子とするのである。具体的には

$$\phi_+(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} e^{ipx} a(p) \tag{37}$$

$$\phi_-(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} e^{-ipx} a^\dagger(p) \tag{38}$$

（$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$）とした時、クライン-ゴルトン方程式の一般解

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_+(x) + \phi_-(x) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \left( e^{ipx} a(p) + e^{-ipx} a^\dagger(p) \right) \end{aligned} \tag{39}$$

が場のフーリエ積分表示であり、量子化は交換関係

$$[a(p), a^\dagger(\acute{p})] = (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \acute{\mathbf{p}}) \tag{40}$$

により与えられる。ここで $p^0$ は $p^2 + m^2 = 0$ の on-shell 条件を満たしているとする。これらの表示はローレンツ不変な形である。つまり相対論的な対称性を持った調和振動子の系である。$\phi_+$ も場の消滅演算子、$\phi_-$ は場の生成演算子という。これらの交換関係は

$$\begin{aligned} [\phi_+(x_1), \phi_-(x_2)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 4E_1 E_2} e^{i(p_1 x_1 - p_2 x_2)} [a(p_1), a^\dagger(p_2)] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} e^{ip(x_1 - x_2)} =: \Delta_+(x_1 - x_2) \end{aligned} \tag{41}$$

となる。$x_1$ と $x_2$ の Minkovsky 距離が $(x_1 - x_2)^2 > 0$ の時（space-like という）には、適当にローレンツ変換すれば

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \tag{42}$$

となり、変数変換することにより $\Delta_+(x_1 - x_2) = \Delta_+(x_2 - x_1)$ が分かる。$\phi(x_1)$ と $\phi(x_2)$ の交換関係は

$$\begin{aligned} [\phi(x_1), \phi(x_2)] &= [\phi_+(x_1), \phi_-(x_2)] + [\phi_-(x_1), \phi_+(x_2)] \\ &= \Delta_+(x_1 - x_2) - \Delta_+(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{43}$$

よって $x_1$ と $x_2$ の関係が space-like の時には $= 0$ となる。これは因果律を表している。一般に 2 つの演算子が交換する時には、それらの演算子の表す物理量の間に相関がないことを意味している。

真空状態は調和振動子の場合と同じで

$$a(p) |0\rangle = 0 \tag{44}$$

なる状態である。即ちスカラー場で表される粒子が 1 つもない状態のことである。この時 2 つのスカラー場の時間順序積は

$$\begin{aligned} T\phi(x_1)\phi(x_2) &= \phi(x_1)\phi(x_2) \quad (x_1^0 > x_2^0 \text{の時}) \\ &= (\phi_+(x_1) + \phi_-(x_1))(\phi_+(x_2) + \phi_-(x_2)) \\ &= \phi_-(x_2)\phi_+(x_1) + \phi_-(x_1)\phi_+(x_2) + \Delta_+(x_1 - x_2) + \phi_+\phi_+ + \phi_-\phi_- \end{aligned} \tag{45}$$

より

$$\langle 0|\, T\phi(x_1)\phi(x_2)\,|0\rangle \quad = \quad \theta(x_1^0-x_2^0)\Delta_+(x_1-x_2)+\theta(x_2^0-x_1^0)\Delta_+(x_2-x_1)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} i\,\langle 0|\, T\phi(x_1)\phi(x_2)\,|0\rangle &= i\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\left[\theta(x_1^0-x_2^0)e^{ip(x_1-x_2)}+\theta(x_2^0-x_1^0)e^{-ip(x_1-x_2)}\right] \\ &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2+m^2-i\varepsilon} \end{aligned} \tag{46}$$

となる。これをプロパゲータという。最後の等式の右辺の意味は、積分の後に $\varepsilon\to 0$ の極限を取ることを意味している。複素平面上での積分を考えれば容易に分かる（付録 A「プロパゲータの積分の計算」を参照)。

正準共役な運動量 $\pi$ は

$$\pi(x)=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}(-ip^0)(e^{ipx}a(p)-e^{-ipx}a^\dagger(p)) \tag{47}$$

で与えられる。$\phi$ と $\pi$ の同時刻での正準交換関係は（即ち $x_1^0=x_2^0$ として）

$$\begin{aligned} [\phi(x_1),\pi(x_2)] &= \int\frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 4E_1E_2}\left(iE_2e^{i(p_1x_1-p_2x_2)}[a(p_1),a^\dagger(p_2)]-iE_2e^{-i(p_1x_1-p_2x_2)}[a^\dagger(p_1),a(p_2)]\right) \\ &= i\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \\ &= i\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2) \end{aligned} \tag{48}$$

となる。

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 4E_1E_2}\Big[(-E_1E_2-\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)(e^{ip_1x}a(p_1)-e^{-ip_1x}a^\dagger(p_1))(e^{ip_2x}a(p_2)-e^{-ip_2x}a^\dagger(p_2)) \\ &\quad +m^2(e^{ip_1x}a(p_1)+e^{-ip_1x}a^\dagger(p_1))(e^{ip_2x}a(p_2)+e^{-ip_2x}a^\dagger(p_2))\Big] \\ &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E}E\left(a^\dagger(p)a(p)+\frac{1}{2}[a(p),a^\dagger(p)]\right) \end{aligned} \tag{49}$$

となる。これはちょうど調和振動子の全てのモードについての重ね合わせとして表されているのが分かる。また最後の項には $\delta(0)$ の積分、即ち無限大の量が現れるが、物理量はその絶対量ではなく、変化量が観測されるので、この無限大は無視出来る。或いは、この無限大は真空のエネルギーとも解釈できる。いずれにせよ、ここでは無視してよい。またハミルトニアンは当然だが、時間に依存していない。系の時間発展はこのハミルトニアンにより生成されるフロー $U_t=e^{-itH}$ により表される。

同様に運動量は (25) より

$$\begin{aligned} P^i &= -\int d^3\mathbf{x}(\partial_i\phi)\pi \\ &= \int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 4E_1E_2}\Big[(-E_1p_2^i)(e^{ip_1x}a(p_1)-e^{-ip_1x}a^\dagger(p_1))(e^{ip_2x}a(p_2)-e^{-ip_2x}a^\dagger(p_2))\Big] \\ &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E}p^i\left(a^\dagger(p)a(p)+\frac{1}{2}[a(p),a^\dagger(p)]\right) \end{aligned} \tag{50}$$

となる。ここで最後の段で $aa, a^\dagger a^\dagger$ のような項が出るはずであるが、これは最初に $\mathbf{x}$ での積分を行い、次に $\mathbf{p}_1$ で積分した時と $\mathbf{p}_2$ で積分した時で逆符号で出てくるが、これらは等しいはずなので 0 でなくてはいけないので消えて

いる。この運動量演算子によるフロー $U_{\mathbf{x}} = e^{i\mathbf{P}\mathbf{x}}$ により平行移動出来る。Lorentz 不変な形でまとめて表すと、時空の平行移動のフローは $U_x = e^{i(\mathbf{P}\mathbf{x} - Hx^0)} = e^{iPx}$ と書ける。

次に運動量 $\mathbf{p}$ の $\phi$ 粒子の 1 粒子状態 $|\mathbf{p}\rangle$ を

$$|\mathbf{p}\rangle = a^\dagger(p)\,|0\rangle \tag{51}$$

で定義する。これはエネルギー、運動量の固有状態、即ち

$$P^\mu\,|\mathbf{p}\rangle = p^\mu\,|\mathbf{p}\rangle \tag{52}$$

である。この時、系のローレンツ変換 $\Lambda$ における、生成消滅演算子の変換則はユニタリー変換

$$U(\Lambda)a^\dagger(p)U^\dagger(\Lambda) = a^\dagger(\Lambda p) \tag{53}$$

により与えられる。よって運動量 $\mathbf{p}$ の状態はローレンツ変換のもと

$$U(\Lambda)\,|\mathbf{p}\rangle = |\Lambda\mathbf{p}\rangle \tag{54}$$

となる（真空状態はローレンツ変換のもと不変であるとする)。さらに $\phi(x)$ はローレンツ変換のもと（$(\Lambda p)(\Lambda x) = px$ に注意すれば）

$$U(\Lambda)\phi(x)U^\dagger(\Lambda) = \phi(\Lambda x) \tag{55}$$

と変換するのが分かる。また生成消滅演算子の交換関係より

$$\langle\mathbf{p}|\acute{\mathbf{p}}\rangle = (2\pi)^3 2E\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \acute{\mathbf{p}}) \quad (E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \tag{56}$$

となる。また $|0\rangle$ に場 $\phi$ をかけて

$$\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} e^{-ipx}\,|\mathbf{p}\rangle \tag{57}$$

よって

$$\langle\mathbf{p}|\phi(x)|0\rangle = e^{-ipx}, \quad \langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle = e^{ipx} \tag{58}$$

となる。多粒子状態 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle$ は

$$|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle = a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2)\cdots a^\dagger(p_n)\,|0\rangle \tag{59}$$

で定義される。これは要するに場 $\phi$ で表される粒子が n 個存在し、それぞれが運動量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ を持っている状態を表している。

1 の分割について考えてみる。1 粒子状態までは簡単で

$$1 = |0\rangle\langle 0| + \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E}\,|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| + \cdots \tag{60}$$

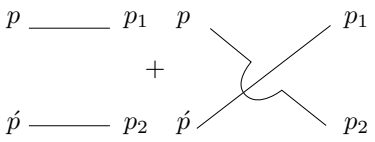
でよい。2 粒子状態からはちょっと考えないといけない。2 粒子状態は単純に考えれば

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E}\frac{d^3\acute{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3 2\acute{E}}\,|\mathbf{p}, \acute{\mathbf{p}}\rangle\langle\mathbf{p}, \acute{\mathbf{p}}| \tag{61}$$

でよさそうだが、両側から $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の運動量を持った状態をかければ、重複が出ることが簡単な計算から分かる。実際に計算してみる。まず、

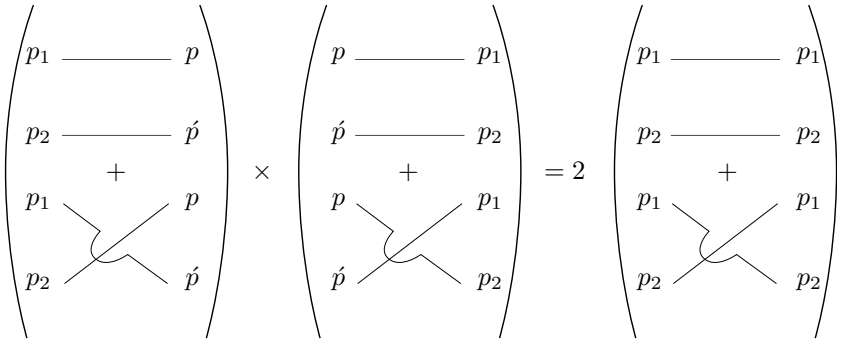
$$\langle\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2|\mathbf{p}, \acute{\mathbf{p}}\rangle = \langle\mathbf{p}_1|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}_2|\acute{\mathbf{p}}\rangle + \langle\mathbf{p}_1|\acute{\mathbf{p}}\rangle\langle\mathbf{p}_2|\mathbf{p}\rangle \tag{62}$$

となる。これは Feynman diagram で書くと




と表せる。Feynman diagram の説明をすると、グラフの左側の運動量を書いているところが始状態の粒子を表し、右側の運動量が終状態の粒子の運動量を表している。つまり、運動量 $p$ を持つ粒子が運動量 $p_1$ を持つ粒子になり、運動量 $\acute{p}$ を持つ粒子が運動量 $p_2$ の粒子になるのを表したのが、グラフの左側であり、右側のグラフは逆に運動量 $p$ を持つ粒子が $p_2$ を持つ粒子に、$\acute{p}$ を持つ粒子が $p_1$ になるのを表している。$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}, \acute{\mathbf{p}} \rangle$ はそれら 2 つのグラフで表される状態の和で表されるという意味である。

よって (61) の両側から $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$ をかけてやると、Feynman diagram で表せば、




となる。つまり factor 2 だけ多くカウントしてしまう。よって 1 の分割には 2 粒子状態は

$$1 = |0\rangle\langle 0| + \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} |\mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}| + \frac{1}{2!}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E}\frac{d^3\acute{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3 2\acute{E}} |\mathbf{p}, \acute{\mathbf{p}}\rangle\langle \mathbf{p}, \acute{\mathbf{p}}| + \cdots \tag{63}$$

の形になる。同様の考察から一般に $n$ 粒子状態に対しては $n!$ 回余計にカウントしてしまうので、その分で割ったものが factor として付いてくる。つまり 1 の分割は

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^{n} \left[ \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right] |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle\langle \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n| \tag{64}$$

で与えられることが分かる（$n = 0$ の項は真空状態であるとする）。もっと一般に様々な種類の粒子がある時も、その多粒子状態には同種粒子の数の分だけカウントを差し引くため、factor は $\prod_\alpha \frac{1}{N_\alpha!}$ が付いてくる。ただし $\alpha$ は粒子の種類を表し、$N_\alpha$ はその種類の粒子の数を表す。今は全て同種粒子なので $\frac{1}{n!}$ の factor が付いている。

## 3.2 複素スカラー場

今度は複素スカラー場について説明する。複素場は一般に量子数を持っている場を量子化すると現れる。量子数 $q$ の粒子が生成される時、その状態の量子数は $+q$ 増え、消滅すれば減る。一方量子数 $-q$ の粒子が消滅すれば、それでも状態の量子数は $+q$ 増え、生成されれば減る。一般に質量が等しく、全ての量子数が反対符号で与えられる粒子を、一方の粒子に対して反粒子という。複素スカラー場はつまり、粒子と反粒子の場である。粒子の生成消滅演算子を $a(p), a^\dagger(p)$ で表し、その反粒子の生成消滅演算子を $a^c(p), a^{c\dagger}(p)$ で表す。場の生成消滅演算子の交換関係は

$$\begin{cases} \phi_+(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} e^{ipx} a(p) & \phi_-(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} e^{-ipx} a^\dagger(p) \\ \phi^c_+(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} e^{ipx} a^c(p) & \phi^c_-(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} e^{-ipx} a^{c\dagger}(p) \end{cases} \tag{65}$$

に対し

$$[a(p), a^\dagger(\acute{p})] = [a^c(p), a^{c\dagger}(\acute{p})] = (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \acute{\mathbf{p}}) \tag{66}$$

により与えられる。ただし他は全て交換する。一般に複素場は量子数を持っている。量子数を表す charge を $Q$ とすれば（$Q = Q^\dagger$）

$$\left\{ \begin{array}{l} [Q, \phi_+] = -q\phi_+ \\ [Q, \phi_-] = q\phi_- \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left[Q, \phi_+^c\right] = q\phi_+^c \\ \left[Q, \phi_-^c\right] = -q\phi_-^c \end{array} \right. \tag{67}$$

で与えられる。ただし $q$ は実数であり、量子数を表している。複素スカラー場 $\phi$ は、クライン-ゴルトン方程式の一般解

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_+ + \phi_-^c \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}(e^{ipx}a(p) + e^{-ipx}a^{c\dagger}(p)) \end{aligned} \tag{68}$$

により与えられる。$\phi$ の量子数は

$$[Q, \phi] = -q\phi \tag{69}$$

となり、charge q の粒子を消滅、反粒子を生成する演算子を表している。場 $\phi$、$\phi^\dagger$ の交換関係は

$$\begin{aligned} [\phi(x_1), \phi^\dagger(x_2)] &= [\phi_+(x_1), \phi_-(x_2)] + [\phi_-^c(x_1), \phi_+^c(x_2)] \\ &= \Delta_+(x_1 - x_2) - \Delta_+(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{70}$$

となり、ここでも space-like の時には $= 0$ となり、因果律を満たしている。また $T$ 積は

$$\begin{aligned} T\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2) &= \theta(x_1^0 - x_2^0)\left[(\phi_+(x_1) + \phi_-^c(x_1))(\phi_+^c(x_2) + \phi_-(x_2))\right] + (x_2^0 \leftrightarrow x_1^0\text{の項}) \\ &= \theta(x_1^0 - x_2^0)\Delta_+(x_1 - x_2) + \theta(x_2^0 - x_1^0)\Delta_+(x_2 - x_1) \\ &\quad + \{\phi_-\phi_+\text{の順の項} + \phi_+\phi_+, \phi_-\phi_-\text{の項}\} \end{aligned} \tag{71}$$

従ってプロパゲータは

$$\begin{aligned} i\langle 0|T\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)|0\rangle &= i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\left[\theta(x_1^0 - x_2^0)e^{ip(x_1-x_2)} + \theta(x_2^0 - x_1^0)e^{-ip(x_1-x_2)}\right] \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \end{aligned} \tag{72}$$

となる。ハミルトニアンまで計算してみよう。まず、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + m^2\phi^\dagger\phi) \qquad (*\mathcal{L} = -(d\phi^\dagger \wedge *d\phi + m^2 * \phi^\dagger\phi)) \tag{73}$$

である。よって $\phi$、$\phi^\dagger$ それぞれの正準共役運動量密度 $\pi$、$\pi^\dagger$ は

$$\pi = \partial_0\phi^\dagger, \quad \pi^\dagger = \partial_0\phi \tag{74}$$

となる。従ってハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \partial_0\phi^\dagger\partial_0\phi + \nabla\phi^\dagger\nabla\phi + m^2\phi^\dagger\phi \tag{75}$$

であり、運動量密度は

$$T^{0i} = -(\partial_i\phi)\pi - (\partial_i\phi^\dagger)\pi^\dagger \tag{76}$$

となる。ハミルトニアンは、実スカラー場の時とほぼ同様の計算をすると

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} E\Big(a^\dagger(p)a(p) + a^{c\dagger}(p)a^c(p) + [a^c(p), a^{c\dagger}(p)]\Big) \tag{77}$$

であり、運動量は

$$P^i = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} p^i \Big(a^\dagger(p)a(p) + a^{c\dagger}(p)a^c(p) + \frac{1}{2}[a(p), a^\dagger(p)] + \frac{1}{2}[a^c(p), a^{c\dagger}(p)]\Big) \tag{78}$$

となる。

運動量 $\mathbf{p}$ の $\phi$ 粒子の 1 粒子状態と反粒子の 1 粒子状態はそれぞれ

$$|\mathbf{p}\rangle = a^\dagger(p)\,|0\rangle \tag{79}$$

$$|\bar{\mathbf{p}}\rangle = a^{c\dagger}(p)\,|0\rangle \tag{80}$$

で与えられる。これらはエネルギー、運動量の固有状態、即ち

$$P^\mu\,|\mathbf{p}\rangle = p^\mu\,|\mathbf{p}\rangle \tag{81}$$

$$P^\mu\,|\bar{\mathbf{p}}\rangle = p^\mu\,|\bar{\mathbf{p}}\rangle \tag{82}$$

となる。ローレンツ変換は

$$U(\Lambda)a^\dagger(p)U^\dagger(\Lambda) = a^\dagger(\Lambda p), \qquad U(\Lambda)a^{c\dagger}(p)U^\dagger(\Lambda) = a^{c\dagger}(\Lambda p) \tag{83}$$

より

$$U(\Lambda)\,|\mathbf{p}\rangle = |\Lambda\mathbf{p}\rangle\,, \qquad U(\Lambda)\,|\bar{\mathbf{p}}\rangle = |\bar{\Lambda\mathbf{p}}\rangle \tag{84}$$

および

$$U(\Lambda)\phi(x)U^\dagger(\Lambda) = \phi(\Lambda x) \tag{85}$$

により与えられる。状態ベクトルの大きさは

$$\langle\mathbf{p}|\acute{\mathbf{p}}\rangle = (2\pi)^3 2E\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\acute{\mathbf{p}}), \qquad \langle\bar{\mathbf{p}}|\acute{\bar{\mathbf{p}}}\rangle = (2\pi)^3 2E\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\acute{\mathbf{p}}), \qquad \langle\mathbf{p}|\acute{\bar{\mathbf{p}}}\rangle = 0 \tag{86}$$

となる。$|0\rangle$ に場 $\phi$、$\phi^\dagger$ をかけて

$$\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} e^{-ipx}\,|\bar{\mathbf{p}}\rangle\,, \qquad \phi^\dagger(x)\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} e^{-ipx}\,|\mathbf{p}\rangle \tag{87}$$

よって

$$\langle\bar{\mathbf{p}}|\phi(x)|0\rangle = e^{-ipx}, \qquad \langle\mathbf{p}|\phi^\dagger(x)|0\rangle = e^{-ipx}, \quad (\text{and } h.c) \tag{88}$$

となる（$h.c$ はこれらのエルミート共役の意味。また他の組み合わせは 0)。多粒子状態は

$$|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n, \acute{\bar{\mathbf{p}}}_1, \cdots, \acute{\bar{\mathbf{p}}}_m\rangle = a^\dagger(p_1)\cdots a^\dagger(p_n)a^{c\dagger}(\acute{p}_1)\cdots a^{c\dagger}(\acute{p}_m)\,|0\rangle \tag{89}$$

で定義される。1 の分割は $\phi$ 粒子とその反粒子の 2 種類の粒子が存在するので

$$1 = \sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \int \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{n,m} \left[\frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{d^3\acute{\mathbf{p}}_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right] |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n, \acute{\bar{\mathbf{p}}}_1, \cdots, \acute{\bar{\mathbf{p}}}_m\rangle\langle\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n, \acute{\bar{\mathbf{p}}}_1, \cdots, \acute{\bar{\mathbf{p}}}_m| \tag{90}$$

で与えられる。ただし $n = m = 0$ の項は真空状態とする。

### 3.3 汎関数積分による量子化

ここでは説明を簡単にするため実スカラー場に限定して、またこれまで同様に相互作用がない、即ち自由実スカラー場について、汎関数積分を使った量子化を説明する。量子力学における経路積分を拡張し（"経路積分"note 参照)、場の理論での汎関数積分は $H|0\rangle = 0$ に注意すれば、ディラック表示で

$$Z(\rho) = \langle 0|Te^{i\int \phi\rho}|0\rangle = \int [d\phi]e^{i\int[\mathcal{L}+\phi\rho]} \tag{91}$$

により与えられる。ここで $\rho$ は外場である。これを生成汎関数という。ここで（外場を除いた）作用は

$$\begin{aligned} S = \int \mathcal{L} &= -\int \frac{1}{2}\phi(-\partial^2 + m^2)\phi \\ &= -\frac{1}{2}\phi(-\partial^2 + m^2)\phi \end{aligned} \tag{92}$$

と書ける。ここで 2 段目の式の意味は"無限次元の"行列、ベクトルのように表している。有限次元の $-\frac{1}{2}(\mathbf{x}\cdot M\mathbf{x})$ の拡張である。汎関数積分は"経路積分"note の有限次元の場合を参照すれば（$\rho = 0$ の時 $Z(0) = 1$ と規格化しておけば)、

$$Z(\rho) = e^{\frac{i}{2}\rho G\rho} \tag{93}$$

となる。ここで $G$ は形式的には $(-\partial^2 + m^2)$ の"逆行列"$(-\partial^2 + m^2)^{-1}$ であり、

$$G(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \tag{94}$$

である。従って $\rho$ での汎関数微分を行えば

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\rho(x_1)}\frac{\delta}{\delta\rho(x_2)}Z(\rho)\bigg|_{\rho=0} = G(x_1 - x_2) \tag{95}$$

一方、左辺は

$$i\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle \tag{96}$$

に等しく、これは (46) に一致する。

相互作用のある場合に摂動論で計算する際に必要な計算をしておく。一般的に $n = 2m$ として

$$\left(\frac{1}{i}\right)^m \frac{\delta}{\delta\rho(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\rho(x_n)}Z(\rho)\bigg|_{\rho=0} = i^m\langle 0|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|0\rangle \tag{97}$$

となる。一方 (93) を使い実際に計算すれば、

$$\text{左辺} = \sum_\pi i^m\langle 0|T\phi(x_{\pi_1})\phi(x_{\pi_2})|0\rangle\cdots\langle 0|T\phi(x_{\pi_{n-1}})\phi(x_{\pi_n})|0\rangle \tag{98}$$

となる。ただし和は $1, 2, \cdots, n$ を 2 つずつのペアに分ける全ての組み合わせにわたる（重複なし)。即ち

$$i^m\langle 0|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|0\rangle = \sum_\pi i^m\langle 0|T\phi(x_{\pi_1})\phi(x_{\pi_2})|0\rangle\cdots\langle 0|T\phi(x_{\pi_{n-1}})\phi(x_{\pi_n})|0\rangle \tag{99}$$

が分かる。$n$ が奇数の場合には振幅は 0 となる（注意しておくが、今は相互作用がない場合を考えているので $n$ が奇数の時は 0 となるが、一般に相互作用がある時には 0 とはならない)。これを Wick's rule という。

### 3.4 S matrix

ここでは一般的な相互作用がある場合に必要な S matrix を説明する。結論から言うと、S matrix とは、一般的な相互作用の項があるハミルトニアンに対する時間発展演算子 $U_{t\leftarrow t_0}$ に対し

$$S = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} U_{t\leftarrow t_0} \tag{100}$$

により与えられる。S matrix の性質は

$$S = 1 + iT, \quad SS^\dagger = S^\dagger S = 1 \tag{101}$$

である。よって

$$2\mathrm{Im}T = T^\dagger T \tag{102}$$

となる。ここで $\mathrm{Im}T = \frac{(T-T^\dagger)}{2i}$ である。散乱振幅は始状態 $|i\rangle$、終状態 $|f\rangle$ に対し

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + i\langle f|T|i\rangle \tag{103}$$

で与えられる。右辺の第 2 項が相互作用を表している。これは一般的にこうなる。この性質により $S = 1+iT$ と置くのである。通常は $|i\rangle$、$|f\rangle$ に運動量 $p$ の固有状態（一般に多粒子状態）にとる。従ってその場合、振幅は Lorentz 対称になる。(100) は $|i\rangle$ が散乱されて $|f\rangle$ になる状態が十分長いと解釈出来るから、時間間隔を無限大の極限をとる。$|i\rangle$、$|f\rangle$ が $p$ の固有状態の時 $\langle f|T|i\rangle$ には $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)$ のような形でデルタ関数が付いてくる（これは Lorentz 対称性の反映であり、エネルギー運動量保存を意味している）。即ち

$$\langle \mathbf{p}_f|T|\mathbf{p}_i\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i) \tag{104}$$

の形になる。また遷移確率（反応確率）は

$$|\langle f|T|i\rangle|^2 \tag{105}$$

により与えられる（$T$ ではなく、$S$ の場合には反応しない場合も含まれていることに注意）。よって遷移確率にはデルタ関数の 2 乗が生じる。このデルタ関数の内、1 つは

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) \to \int d^4x$$

と解釈することが出来る。従って通常、この余計なデルタ関数を 1 つ除いたものを単位時間、単位体積当たりの遷移確率とみなせる。即ち

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i)|^2 \tag{106}$$

が単位時間、単位体積当たりの遷移確率である。終状態が $f_1, f_2, \cdots$ への単位時間、単位体積当たりの崩壊確率（反応率）は、即ち

$$dP_i = \frac{d^3\mathbf{p}_i}{2E_i}\sum_{f=f_1,f_2,\cdots}\left[\prod_\alpha \frac{1}{N_\alpha!}\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i)|^2 \tag{107}$$

で与えられる。ここで $N_\alpha$ は終状態での同種粒子の数であり、粒子の種類を $\alpha$ で表している。この factor は全ての終状態についての和を取り、さらに total の時間、体積に対して和を取った時に、確率が $\langle i|T^\dagger T|i\rangle$ となるために

$\sum_f |p_f\rangle \langle p_f|$ が 1 の分割を与えるように取ってある。また一方で、単位時間、単位体積当たり崩壊確率は、微分断面積を $d\sigma_i$、入射 flux を $J$ とすると

$$dP_i = \frac{d^3\mathbf{p}_i}{2E_i} J d\sigma_i \tag{108}$$

とも表せる。よって微分断面積は

$$d\sigma_i = \frac{1}{J} \sum_{f_1,f_2,\cdots} \left[ \prod_\alpha \frac{1}{N_\alpha!} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |\mathcal{M}(p_f - p_i)|^2 \tag{109}$$

とも表せる。終状態全ての場合について足し上げ、total の時間、体積に対しても和を取ったものを $\sigma_T$ と書き、全断面積という。これらのことから、特に始状態 $|i\rangle$ がある決まった状態 $i_0$ であると分かっている場合には $dP = \sum \delta_{ii_0} dP_i$ と $p_i$ について和を取れば（$d\sigma_i$ も同様に和を取り）

$$\frac{J}{2E} d\sigma = dP \tag{110}$$

となる。さらに補足すると、$2\mathrm{Im}\,\langle i|T|i\rangle = \langle i|T^\dagger T|i\rangle = J\sigma_T$ より

$$\sigma_T = \frac{2}{J} \mathrm{Im}\,\langle i|T|i\rangle \tag{111}$$

となる。これを光学定理という。

## 3.5 相互作用

これまでは相互作用のない自由なスカラー場の量子論を説明してきた。この節では相互作用のある場合の説明。ラグランジアンを

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{112}$$

とする。$\phi^4$ の項が相互作用を表している。従って生成汎関数をディラック表示で表せば

$$\langle 0|T e^{-\frac{i\lambda}{4!}\int \phi^4}|0\rangle \tag{113}$$

となる。実際に 2 粒子の散乱振幅 $\langle \acute{\mathbf{p}}_1, \acute{\mathbf{p}}_2|U_{\infty\leftarrow-\infty}|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle = \langle \acute{\mathbf{p}}_1, \acute{\mathbf{p}}_2, +|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,-\rangle$ を計算してみよう。ディラック表示で表すと

$$\begin{aligned} \langle \acute{\mathbf{p}}_1, \acute{\mathbf{p}}_2, +|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,-\rangle &= \langle \acute{\mathbf{p}}_1, \acute{\mathbf{p}}_2|T e^{-\frac{i\lambda}{4!}\int \phi^4}|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)^n \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \, \langle \acute{\mathbf{p}}_1, \acute{\mathbf{p}}_2|T\phi^4(x_1)\cdots\phi^4(x_n)|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle \end{aligned} \tag{114}$$

となる（ディラック表示は相互作用のない時間発展演算子で時間発展するので、$e^{-i(\acute{p}_1+\acute{p}_2-p_1-p_2)T}$ のような factor が生じるが、これは最終的にエネルギー保存より消えるので省略している）。よって被積分関数を求めれば計算出来る。今はディラック表示なので、時間発展は相互作用が何もないハミルトニアンにより生成されていることに注意。まず最初の order は

$$\langle \acute{\mathbf{p}}_1, \acute{\mathbf{p}}_2|\phi^4(x)|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle \tag{115}$$

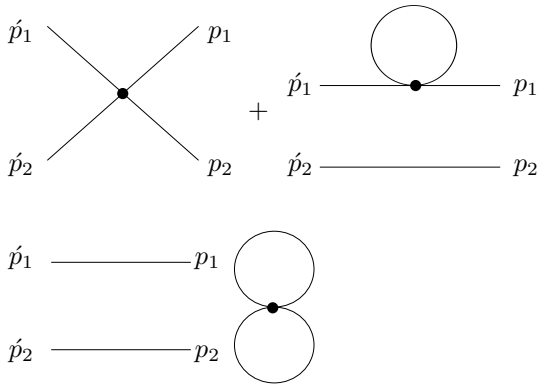
であるが（全て同時刻なので $T$ は必要ない）、これは (51) に注意し

$$[\phi(x), a^\dagger(p)] = e^{ipx}, \qquad [a(p), \phi(x)] = e^{-ipx} \tag{116}$$

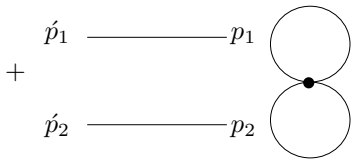
を使い、$|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle$ の中の $a^\dagger(p_1),a^\dagger(p_2)$ を項の中の一番左側にまで持っていき、$\langle\acute{\mathbf{p}}_1,\acute{\mathbf{p}}_2|$ の中の $a(\acute{p}_1),a(\acute{p}_2)$ を項の中の一番右側にまで持っていけば計算でき、

$$\begin{aligned}\langle\acute{\mathbf{p}}_1,\acute{\mathbf{p}}_2|\phi^4(x)|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle &= 4!e^{i(p_1+p_2-\acute{p}_1-\acute{p}_2)x}+4\cdot3\,\langle\acute{\mathbf{p}}_1|\mathbf{p}_1\rangle\,e^{i(p_2-\acute{p}_2)x}\,\langle0|\phi^2(x)|0\rangle+\cdots\\ &\quad+\langle\acute{\mathbf{p}}_1,\acute{\mathbf{p}}_2|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle\,\langle0|\phi^4(x)|0\rangle\\ &= 4!e^{i(p_1+p_2-\acute{p}_1-\acute{p}_2)x}+12\,\langle\acute{\mathbf{p}}_1|\mathbf{p}_1\rangle\,e^{i(p_2-\acute{p}_2)x}\,\langle0|\phi^2(x)|0\rangle+\cdots\\ &\quad+3\,\langle\acute{\mathbf{p}}_1,\acute{\mathbf{p}}_2|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle\,\langle0|\phi^2(x)|0\rangle\,\langle0|\phi^2(x)|0\rangle \qquad (117)\end{aligned}$$

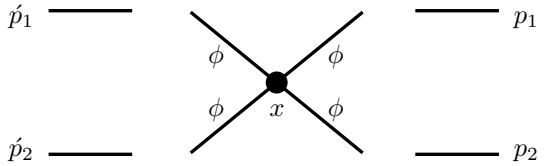
のようになる。これは Feynman-diagram で表せば、




＋同じ形で運動量を入れ替えたグラフ




と書ける。簡単に説明すると、$\phi^4$ を 1 つの頂点から 4 本の線が伸びたグラフが対応し、その線の各々が $\phi(x)$ に対応する（下図の真中のグラフ）。$|p\rangle$ や $\langle p|$ には線の端点（外線と呼ぶ）が対応する（下図の両側の線）。$|p\rangle$ の中の $a^\dagger(p)$ と $\phi$ が交換して指数関数が出てくる項（縮約と呼ぶ）には 4 本の線が伸びたグラフの内の 1 つの（$\phi$ に対応する）の線と運動量 $p$ の外線を結んだものが対応する。また $|p\rangle$ と $\langle p|$ の縮約には外線通しがつながったものに対応する。即ち下図のように 4 本の線の伸びたグラフと 4 つの外線との結び方にちょうど対応する。




4 つの線の伸びたグラフのそれぞれの線に外線がつながるものや、2 つの外線（右側と左側）がつながり、4 つの線のあるグラフの線の内 2 つの線がつながり残りが外線とつながるものもあるし、4 つの線のあるグラフの線通しが全てつながり、外線通しがつながるものもある。外線と $\phi$ がつながる時には $e^{ipx}$ が現れ、$\phi$ 通しがつながれば $\langle0|\phi^2|0\rangle$ が現れる。全ての組み合わせについて和を取れば (117) のようになる。これら 3 種類のグラフからの寄与の内、最後のグラフは始状態が $p_1,p_2$ で終状態が $\acute{p}_1,\acute{p}_2$ への散乱を表していない。八の字のグラフは真空エネルギーへの寄与を表しており、振幅を規格化した時にこのグラフはなくなる。また 2 つ目のグラフは質量への相互作用による寄与を表しており、これはここでの繰り込みの計算には考慮しなくてよい（これらのことは後で理解できる）。一般に散乱振幅の繰り込みを行う際には全ての外線が $\phi$ で表される線（内線と呼ぶ）でつながっているグラフのみ考えればよい。そのようなグラフを連結グラフと呼ぶ。よって最初の order では

$$\begin{aligned}i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)\mathcal{M}_1(p_f\leftarrow p_i) &= -\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x4!e^{i(p_1+p_2-\acute{p}_1-\acute{p}_2)x}\\ &= -i\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-\acute{p}_1-\acute{p}_2) \qquad (118)\end{aligned}$$

即ち最初の order で

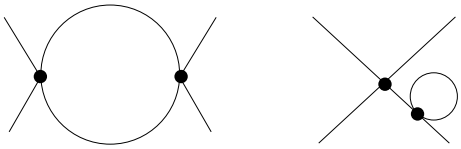
$$\mathcal{M}_1(p_f\leftarrow p_i)=-\lambda \qquad (119)$$

となる。

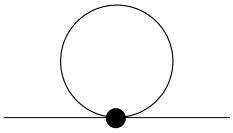
次の order の計算をしてみる。

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \, \langle \acute{\mathbf{p}}_1, \acute{\mathbf{p}}_2 | T\phi^4(x_1)\phi^4(x_2) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \tag{120}$$

を計算すればよい。これは Feynman-diagram を使って計算すれば非常に簡単に計算出来る。連結グラフは



の 2 種類のグラフがあるが、右側のグラフはこれも考慮する必要がない。これは部分的に



のグラフを含んでおり（このようなものを部分グラフという）、これは質量の繰り込みを行えば考えなくてよくなる（これも後で理解出来る）。外線への運動量の割り振りは 3 通りある。また各々の割り振りに対して、4 本線の頂点の繋ぎ方が $(4!)^2$ 通りある（$x_1$ と $x_2$ の入れ替えに対して完全に対称的なことに注意）。即ち

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f \leftarrow p_i)\mathcal{M}_2(p_f \leftarrow p_i) &= \frac{1}{2!}(4!)^2\left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \Big[ e^{i(p_1+p_2)x_2 - i(\acute{p}_1+\acute{p}_2)x_1} \\ &\quad + e^{i(p_1-\acute{p}_1)x_2 - i(-p_2+\acute{p}_2)x_1} + e^{i(p_1-\acute{p}_2)x_2 - i(-p_2+\acute{p}_1)x_1} \Big] \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle^2 \\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-\acute{p}_1-\acute{p}_2)\frac{1}{2}\lambda^2(F(s)+F(t)+F(u)) \end{aligned} \tag{121}$$

ここで $s=-(p_1+p_2)^2, t=-(p_1-\acute{p}_1)^2, u=-(p_1-\acute{p}_2)^2$ であり、$F(-p^2)$ は

$$F(-p^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon} \frac{1}{(k-p)^2+m^2-i\varepsilon} \tag{122}$$

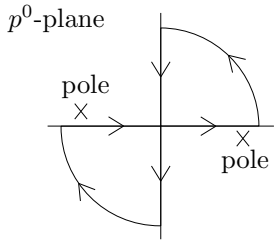
である。ここではこれ以上の計算に立ち入らず、次の節で一般的な Feynman rule を説明する。ひとつ注意しておくと、この積分の被積分関数は $k\to\infty$ で $\frac{1}{k^4}$ のように振る舞うので、この積分は $k$ の積分を $0\sim\Lambda$ までで抑えると、$\sim \ln\Lambda$ のように振る舞うことが分かる。即ち $\Lambda\to\infty$ で発散する。これがいわゆる、発散の問題である。この発散を取り除く手法を繰り込みという。計算上、次元を 4 から $n$ 次元へ拡張して考えると、この発散が見えやすい。$n\to 4$ の極限で発散が生じるからである。従って $n\to 4$ の極限で生じる発散部分を繰り込んでいくことにより有限の値が得られる。次元を一般的な $n$ 次元に拡張して計算する手法を次元正則化という。次元を $n$ 次元として考え、有限な値を得られるように、理論を正則化するのである。以下では次元を $n$ 次元として考えていく。実際に繰り込みの計算は後で説明する。

## 3.6 Euclid 時空

この節では、Feynman rule を説明する前に、摂動等の計算を簡単にする手法を説明する。一般にグラフの計算はガウス積分を使うが（後述する）、そのためには理論を $n$ 次元 Minkowsky 時空から $n$ 次元 Euclid 時空へ移すとよい。先ず、プロパゲータを $G(x)$ とする。

$$G(x) = \int \frac{dp^0 d^{n-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i[\mathbf{px}-p^0x^0]}}{\mathbf{p}^2-p^{02}+m^2-i\varepsilon} \tag{123}$$

先ず、$x^0 = 0$ とすると、$p^0$ が下図のような積分路（複素平面上の）を辿れば $= 0$ なので、$p^0$ の積分を虚軸に沿って取ることが出来る。




次に

$$p^0 = ik^0 \tag{124}$$

と積分変数を変えれば（$\mathbf{p} = \mathbf{k}$ と置き換えて）

$$G(x) = i \int \frac{dk^0 d^{n-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{kx}}}{\mathbf{k}^2 + k^{02} + m^2} \tag{125}$$

となる。すると $G(x)$ の Lorentz 不変性より、結局 space-like な領域全体においても上の式が成立していることが分かる。即ち

$$G(x) = i \underbrace{\int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2}}_{=:G_E(x)} \quad (k^2 = k^{02} + \mathbf{k}^2) \tag{126}$$

この時、$x$ は

$$x^0 = -ix_E^0 \tag{127}$$

のように変わる。よって計量は $\delta_{\mu\nu}$ になる。後はこれを Minkovsky 空間全てにわたって解析接続すれば、任意の $x$ で成立することが分かる。一般的に摂動の計算はこの Euclid 時空へ移したもので計算することが出来る。例えば、前節で最終的に得られた積分は計算出来る。詳しくは後述する。この Euclid 時空への変換のもと、生成汎関数は

$$\begin{aligned} Z(\rho) &= \int [d\phi] \exp\{-\int d_E^n x(\mathcal{L}_E - \rho\phi)\} \\ &= \langle 0|T \exp\{\int d_E^n x \rho\phi\}|0\rangle \end{aligned} \tag{128}$$

であり、$\mathcal{L}_E$ は (127) の座標変換のもと変換した後のラグランジアンの $-$ 倍である。従って $\mathcal{L}_E \geq 0$ である。

簡単に自由実スカラー場の場合で考えてみる。作用 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \int d_E^n x \mathcal{L}_E \\ &= \frac{1}{2} \int d_E^n x \phi(-\partial^2 + m^2)\phi \end{aligned} \tag{129}$$

ここで $\partial^2 = \delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ である。よって生成汎関数は（外場を入れて）

$$Z(\rho) = e^{\frac{1}{2}\rho G_E \rho} \tag{130}$$

従って $\rho$ で 2 回微分し、$\rho = 0$ と置くことにより

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \tag{131}$$

これは (140) に注意すれば、Minkovsky 時空のまま計算した以前の結果 (46) に一致しているのが分かる。(Euclid 時空へ移すことの利点として、運動量での積分が簡単になること以外に、上の結果を見たら分かるように、虚数の $i$ が現れない点にある。これにより煩雑さがちょっと減る) 相互作用を計算する際にはこのようにして Euclid 時空へ移して計算する。全ての計算が終わった後に、また Minkovsky 時空へ移すことになる。

相互作用のある場合には、簡単に $\phi^4$ の場合、生成汎関数はディラック表示で

$$\langle 0|Te^{-\frac{\lambda}{4!}\int_E \phi^4}|0\rangle \tag{132}$$

である。

### 3.7 Feynman rule

この節では Feynman rule を説明する。ここでは前節のように Euclid 時空であるとする。

ここでは一般的に相互作用がある場合について。$N$ 点グリーン関数 $G^{(n)}$ を

$$\begin{aligned} G(x_1,\cdots,x_N) &= \frac{\delta}{\delta\rho(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\rho(x_N)}Z(\rho)\Big|_{\rho=0} \\ &= \langle 0|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)e^{-\frac{\lambda}{4!}\int_E \phi^4}|0\rangle \end{aligned} \tag{133}$$

の $n$ 次の order の摂動項として定義する。これは明らかに並進対称性があるためこれを全ての $x_1 \sim x_N$ についてフーリエ変換すると

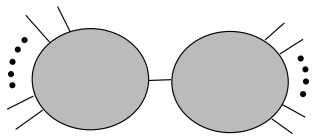
$$\int\prod_{i=1}^{N}[d_E^n x_i]e^{-i\sum_i p_i x_i}G(x_1,\cdots,x_N) = (2\pi)^n\delta^{(n)}(\sum p)G(p_1,\cdots,p_N) \tag{134}$$

及び

$$G(x_1,\cdots,x_N) = \int\prod_{i=1}^{N}\left[\frac{d_E^n p_i}{(2\pi)^n}\right]e^{i\sum_i p_i x_i}(2\pi)^n\delta^{(n)}(\sum p)G(p_1,\cdots,p_N) \tag{135}$$

となる。これは並進対称性より $G(x_1,\cdots,x_N)$ が $N-1$ 自由度しかないことによるが、物理的には並進対称性の反映として、エネルギー・運動量保存を意味している。

一般的に言って、相互作用のある場合に摂動論で計算し、繰り込みを行う際に考えるべきグラフは連結グラフでなくてはいけない。さらに"既約グラフ"でないといけない。既約グラフの意味は以下の通りである。下図のようなグラフは可約グラフといわれる。



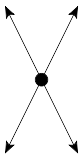
即ち一言でいえば、ループになってない内線が存在するグラフのことである。その線でグラフを切れば 2 つのグラフに分けることが出来る時、可約であるというのである。可約グラフでないグラフを既約グラフという。既約グラフを全て考慮し、繰り込みを行えば、自動的にこのような可約グラフは繰り込まれていることになる。それは可約グラフを既約になるまで分けて行った時の、それぞれの既約グラフが既に繰り込まれているからである。もちろん、可約グラフを理論から全く無視してよいという意味ではない。摂動論的に計算した時の相互作用による寄与には、これら可約グラフも考慮しないといけない。これらも寄与するからである。また連結でないグラフも一般には寄与する。よってこれらも計算に入れて考える必要がある。ただ、繰り込みの計算の時には無視しておいてよいのであ

る。ひとつ例外は、外線を全く含まないグラフを含む場合である。これは真空状態の規格化により消えるので、相互作用による寄与にも考慮する必要がない。

次に前節と同じ $\phi^4$ の相互作用のある場合について計算をしてみる。まず最初の order から

$$G^{(1)}(x_1,\cdots,x_4) = -\frac{\lambda}{4!}\int d_E^n y \,\langle 0|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_4)\phi^4(y)|0\rangle \tag{136}$$

このうち実質的に寄与するのは連結グラフであり、



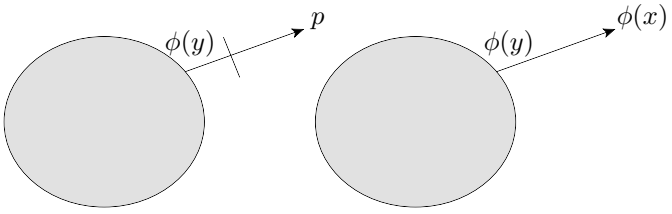
のグラフである。矢印は今は気にしなくてよい。この計算は汎関数微分を用いると非常に簡単に計算出来て、

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1,\cdots,x_4) &= -\lambda\int d_E^n y G(y-x_1)\cdots G(y-x_4) \\ &= -\lambda\int d_E^n y\int \frac{d_E^n p_1\cdots d_E^n p_4}{(2\pi)^{4n}}\frac{e^{i[p_1(y-x_1)+\cdots+p_4(y-x_4)]}}{(p_1^2+m^2)\cdots(p_4^2+m^2)} \end{aligned} \tag{137}$$

これをフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} G^{(1)}(p_1,\cdots,p_4) &= -\lambda\int d_E^n y\int d_E^n \acute{p}_1\cdots d_E^n \acute{p}_4 \frac{e^{i[\acute{p}_1 y+\cdots+\acute{p}_4 y]}\delta^{(n)}(p_1+\acute{p}_1)\cdots\delta^{(n)}(p_4+\acute{p}_4)}{(\acute{p}_1^2+m^2)\cdots(\acute{p}_4^2+m^2)} \\ &= -\lambda\int d_E^n y\frac{e^{-i[p_1 y+\cdots+p_4 y]}}{(p_1^2+m^2)\cdots(p_4^2+m^2)} \\ &= -\lambda\frac{(2\pi)^n\delta^{(n)}(p_1+\cdots+p_4)}{(p_1^2+m^2)\cdots(p_4^2+m^2)} \end{aligned} \tag{138}$$

となる。これは (118) と比べれば、分母の部分だけが異なる（Euclid 時空から Minkovsky 時空へ移せば第 0 成分のデルタ関数から $i$ の factor が出る）。これは一般的にいえて、外線を $\phi$ として計算したものをフーリエ変換すると、外線を $|p\rangle$ のようにして計算したものに $\frac{1}{p^2+m^2}$ をかけたものが得られる。この事実を LSZ（Lehmann-Symanzik-Zimmerman）簡約公式という。一般的な証明は以下の通りである。一般的な外線がいくつかあって、$\int\phi^4$ のような相互作用のある場合の適当な order での摂動計算の場合を考える。以下はそのグラフを表している。




左の図が外線が運動量 $p$ の状態の場合の図であり、右の図が外線が $\phi$ の場合である。2 つはグラフの外線の 1 箇所が $|p\rangle$（左図）か $\phi(x)$（右図）かの違いしかなく、後は全く同じものを表しているとする。左の図の外線を横切るようについた線は今は右の図とを区別するためのものと思ってよい。右図の外線の部分は

$$\cdots\int d_E^n y\cdots\int\frac{d_E^n k}{(2\pi)^n}\frac{e^{ik(y-x)}}{k^2+m^2} \tag{139}$$

が対応するが、これをフーリエ変換すると（$x$ での積分なのでこの表示した部分だけで十分である）

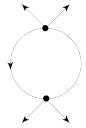
$$\begin{aligned}
&\cdots \int d_E^n y \cdots \int d_E^n x e^{-ipx} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ik(y-x)}}{k^2+m^2} \\
&= \cdots \int d_E^n y \cdots \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{iky}}{k^2+m^2} (2\pi)^n \delta^{(n)}(k+p) \\
&= \cdots \int d_E^n y \cdots \frac{e^{-ipy}}{p^2+m^2}
\end{aligned} \tag{140}$$

$p$ はフーリエ変換した時の変数なので、$p$ の積分は出てこない。これはちょうど上の左の図のグラフを計算したものに $\frac{1}{p^2+m^2}$ をかけたものに等しいことが分かる。以上で一般的な場合が証明出来た。ここで上のグラフの左図の方の外線を横切る線の意味を、この場合と同じように外線を運動量の固有状態にしたもの、または右図の外線に対応する $\frac{1}{p^2+m^2}$ を取り除いたものとする。また、グラフの外線の矢印の意味は上の計算で分かるように終状態に対応する。始状態は逆にグラフの中に向かう向きの矢印で書くことにする。終状態は右図の $x$ について $e^{-ipx}$ でフーリエ変換したものが対応し、始状態は $e^{ipx}$ でフーリエ変換したものが対応するのが分かる。

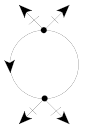
次に

$$G^{(2)}(x_1, \cdots, x_4) = \frac{1}{2!} \left( -\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int \langle 0 | T\phi(x_1) \cdots \phi(x_4) \phi^4(y) \phi^4(z) | 0 \rangle \tag{141}$$

である。寄与は

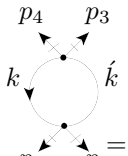


$$= (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + \cdots + p_4) G(p_1, \cdots, p_4)$$



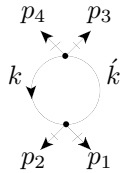
$$= \times \frac{1}{p_1^2+m^2} \cdots \frac{1}{p_4^2+m^2} \tag{142}$$

のグラフから来る。運動量の外線への配置は 3 通りあるが、そのうちのひとつを適当にとってみると

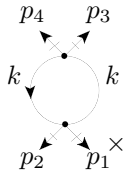



$$= \frac{1}{2} \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{d_E^n \acute{k}}{(2\pi)^n} (-\lambda)(2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + p_2 - k + \acute{k}) \times (-\lambda)(2\pi)^n \delta^{(n)}(p_3 + p_4 + k - \acute{k}) \times \frac{1}{k^2+m^2} \frac{1}{\acute{k}^2+m^2} \tag{143}$$

となる。グラフの説明をすると、各頂点から出る矢印付きの線のうち、頂点から出る向きの線上の運動量は $+$ で、頂点に入る向きの線上の運動量は $-$ で現れる。さらに $\acute{k}$ での積分を行えば




$$=$$

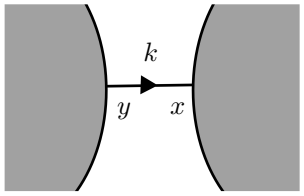



$$\times (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + \cdots + p_4)$$

$$= \frac{(-\lambda)^2}{2} \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2+m^2} \frac{1}{(k-p_1-p_2)^2+m^2} \times (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + \cdots + p_4) \tag{144}$$

ここで右辺 1 段目のグラフは各頂点で運動量の和（入射は $-$、発射は $+$ でカウントして）が 0 になっている。これは前の結果と一致する。

一般的なグラフの計算は、以下の通りである。
まず、グラフの各内線は



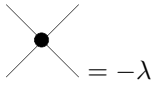

$$\begin{aligned} &= \cdots \int d_E^n x d_E^n y \cdots \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m^2} \\ &= \cdots \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2+m^2} \cdots \int d_E^n x e^{ikx} \cdots \int d_E^n y e^{-iky} \cdots \end{aligned} \tag{145}$$

のようになっていて、従って各頂点に対して、頂点 $x$ に出入りする運動量 $k_1, k_2, \cdots$（出る時は $+$ で、入る時は $-$ がつくとして）に対して $e^{-ikx}$ があるので、$\int d_E^n x e^{-i\sum_i k_i x}$ が現れ、他に $x$ に依存するところがないので、これで $x$ 積分を行えばデルタ関数 $\delta^{(n)}(\sum_i k_i)$ が現れる。各頂点 $x$ に対して $x$ 積分を行い $x$ 積分がなくなった時、各頂点での運動量保存のデルタ関数が現れる。次に運動量 $k$ での積分を行い、デルタ関数が $(2\pi)^n\delta^{(n)}(\sum p)$（$p$ は外線の運動量の和）が現れるまで $k$ 積分を行えば、残った積分の数はグラフの”ループ”の数だけ残る。これは次のようにして考えれば分かる。一般的にグラフの頂点の数を $m$、辺（線）の数を $l$、面の数（ここではループの数）を $n$ とした時のオイラーの公式 $m-l+n=1$（これはコホモロジーによるオイラー数 $\sum(-1)^i H^i = \chi$ に対応する）を使えば良い[2]。まず各頂点のデルタ関数 $\delta^{(n)}(\sum_i k_i)$ は各頂点ごとにあるので、その数は $m$ 個。運動量 $k_i$ での積分の数は線の数だけあるので $l$ 個。よってデルタ関数が最後に 1 個残るまで積分すれば $l-(m-1)=n$ 個だけ運動量の積分が残ることになる。即ちループの数だけ積分が残る。

この時運動量は、各頂点で運動量保存がなりたつように割り振られている。最も簡単なやり方は、まず任意の外線がつながった頂点を選び、そこから出る内線に運動量 $k$ を割り当てる。内線が他にも出ている場合には、運動量保存が成り立つようにして運動量を割り振る。後は、運動量を割り振った内線でつながった他の頂点に対しても同様にして、そこから出る内線に運動量を割り振っていく。そのようにして運動量を割り振っていく時、運動量の数が足りないなら新たに別の運動量を割り振っていくのである。こうして現れる運動量は外線の運動量と、ループの数だけの積分変数の運動量のみである。あとは新たに割り振った積分変数の運動量の積分をすることになる。

次にグラフを作る際の線のつなぎ方について。グラフの頂点を $m$ とする。この時頂点の数が $m$ ということは、摂動の $m$ 次の order を計算していることになる。各頂点には $\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)$ がある。各頂点への $\phi^4$ の割り振り方が頂点の数 $m$ に対して $m!$ 通りあるが、$m$ 次の order なので（(114) を見れば）指数からの寄与として $\frac{1}{m!}$ が来る。よってこれらは相殺して消える。$\phi^4$ の割り振りが決まったら、$\phi$ を線に繋ぐやり方が 4! 通り。これも $\left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)$ の $\frac{1}{4!}$ と相殺して消える。後は結局重複がいくらあるか、重複があればその分余計にカウントしていることになるので、その分だけ割ればよい。重複はグラフの持っている対称性の分だけある。

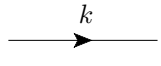
まとめれば、
1) 各頂点に対して運動量保存がなりたつようにして運動量を割り振る。
2) 頂点に対しては




(146)

[2]多角形、もしくは一般的に球面 $S^2$ 上のグラフに対しては $m-l+n=2$ は有名であるが、これを平面 $\mathbb{R}^2$ へ貼り付けた場合、1 つの面がグラフの外側の領域に対応するので、平面上のグラフに関しては、$S^2$ 上の時と比べて面が 1 つ減り、よって $m-l+n=1$ となる。

3) 内線に対しては




$$= \frac{1}{k^2+m^2} \tag{147}$$

4) ループの数だけ運動量の積分 $\int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n}$ を行う。
5) グラフを作る線のつなぎ方について、重複してカウントした分（それはグラフの対称性の分だけある）だけ割る。

以上のやり方で、どんなグラフの計算式も書き下すことが出来る。これが Feynman rule である。ついでに言えば、Euclid 時空から Minkovsky 時空へ戻した時に出る虚数 $i$ の factor は、Minkovsky 時空のまま計算した場合とも（当然だが）一致する。簡単に説明すると、Euclid 時空にしないで Minkokvsky 時空のまま摂動論の計算をする場合、経路積分は

$$\langle 0|Te^{-\frac{i\lambda}{4!}\int \phi^4}|0\rangle \tag{148}$$

であり、プロパゲータは

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \frac{1}{i}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2+m^2-i\varepsilon} \tag{149}$$

であるので頂点関数は $\int d^4x$ の数だけ $i$ がついてきて、$\int d^4p$ の数だけ $\frac{1}{i}$ の factor が付く。既約グラフの場合には頂点の数が $x$ 積分の数 $m$ になり、辺の数が $p$ 積分の数 $l$ になり、ループの数を $n$ とすると、オイラーの公式 $m-l=1-n$ より、ループの数から 1 を引いた数だけ $\frac{1}{i}$ の factor がつくことが分かる。さらに最後に計算するにあたって、Minkovsky 時空から Euclid 時空へ積分変数を変換することにより、$p^0 = ik_E^0$ の置き換えをすることになり、ループの数だけ $i$ のファクターが出てくるので、結局最終的には頂点関数にはどのようなグラフであれ、$i$ の factor のみが残ることになる。4 点関数は tree レベルでは、

$$= -i\lambda \tag{150}$$

であるので、摂動計算にわたって現れる $i$ の factor は、Euclid 時空で計算しても Minkovsky 時空で計算しても整合性が取れている。質量の繰り込みは後ほど詳細に記述するが、この場合にも同様に整合性が取れることが分かる。こちらも簡単に述べると質量の繰込みの場合には、Minkovsky 時空で摂動計算を行うと

$$\frac{-i}{p^2+m^2-\Sigma(p)} = \frac{-i}{p^2+m^2} + \frac{-i}{p^2+m^2}i\Sigma(p)\frac{-i}{p^2+m^2} + \cdots \tag{151}$$

のようになるので、2 点関数の摂動項は $i\Sigma(p)$ のようになる。一方、Euclid 時空で計算を行った場合には摂動項は $\Sigma(p)$ であるので、こちらも $i$ の factor が一致している。その他の頂点関数は 4 点関数の場合と同様である。従って既約グラフの計算をはじめから Minkovsky 時空で計算した結果と Euclid 時空で計算した結果との差異は、Euclid 時空で計算した頂点関数の全体に $i$ の factor が付くという点のみであることが分かる。

さらに付け加えて $\hbar$ とループの数の関係についても言及しておく。この場の量子論 note では $\hbar = 1$ として省略しているが、$\hbar$ を省略しない時には摂動の計算には $\hbar$ の冪の factor がかかってくることになる。$\hbar$ を省略しない場合には、経路積分は

$$Z = \langle 0|Te^{-\frac{i\lambda}{4!\hbar}\int \phi^4}|0\rangle \tag{152}$$

となり、プロパゲータは

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \frac{\hbar}{i}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2+m^2-i\varepsilon} \tag{153}$$

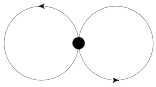
となるので、オイラーの公式から $l-m=n-1$、即ちループの数から 1 を引いた数だけ $\hbar$ の factor がかかる。即ち $\hbar$ の次数はループの数から 1 を引いたものとなる。

## 3.8 真空のエネルギー

この節でも引き続き $\phi^4$ の相互作用の場合について。ここでは真空のエネルギーについて説明する。まず生成汎関数

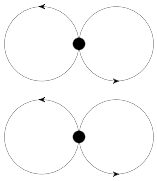
$$\langle 0|Te^{-\frac{\lambda}{4!}\int_E \phi^4}|0\rangle \tag{154}$$

を摂動論により計算する。計算の仕方は前節で説明した Feynman rule に従えばよい。まず最初の order で現れる摂動項は

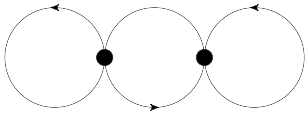


$$= -3\frac{\lambda}{4!}G_E^2(0)(2\pi)^n\delta^{(n)}(0) =: V_1 \tag{155}$$

である。次の order では



$$= \frac{1}{2!}V_1^2,$$



$$= \frac{1}{8}\lambda^2 G_E^2(0)\int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k^2+m^2)^2}\times(2\pi)^n\delta =: V_2 \tag{156}$$

の 2 種類の項が出てくる。この内最初の項の形のグラフにだけに着目すると、これは高次の order を見ていけば、

$$V_1 + \frac{1}{2!}V_1^2 + \frac{1}{3!}V_1^3 + \frac{1}{4!}V_1^4 + \cdots = e^{V_1} \tag{157}$$

のように指数で括れる。これは一般的に言えて、他の形のグラフに対しても同様に指数で括れる。一般的な証明は以下の通りである。まず、連結なグラフを $V_1, V_2, V_3, \cdots$ とする。$N$ 次の order では摂動項は

$$G^{(N)} = \frac{1}{N!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^N \underbrace{\int\cdots\int}_{=N\text{ 個}} d_E^n x_1 \cdots d_E^n x_N \,\langle 0|T\phi^4(x_1)\cdots\phi^4(x_N)|0\rangle \tag{158}$$

であるが、これから連結なグラフのいくつかの積が出てくることになる。それぞれの連結なグラフの頂点の数を $n_1, n_2, n_3 \cdots$ $(n_1+n_2+n_3+\cdots = N)$ と置く。$N$ 個の頂点の内、$n_1$ 個の頂点を選び、残りの頂点の中から $n_2$ 個の頂点を選び、残りの頂点の中から $n_3$ 個の頂点を選び、$\cdots$ としていき、それらの選んだ頂点で連結グラフをそれぞれ作る。選び方は $\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!\cdots}$ 通りあるので

$$\begin{aligned} G^{(N)} &= \sum_J \frac{1}{M_1!}\frac{1}{M_2!}\cdots\prod_i\left[\frac{1}{n_i!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^{n_i}\underbrace{\int\cdots\int}_{n_i\text{個}} d_E^n x_1\cdots d_E^n x_{n_i}\,\langle 0|T\phi^4(x_1)\cdots\phi^4(x_{n_i})|0\rangle_c\right] \\ &= \sum_J \frac{1}{M_1!}\frac{1}{M_2!}\cdots\prod_i V_i \end{aligned} \tag{159}$$

となる。ここで 1 段目のブラケットに付いた $_c$ は連結グラフを表しており（言い換えれば連結グラフに対応する縮約のみを取るものとする）、和は $N$ 個以下の頂点からなる連結グラフの組み合わせで、それらの連結グラフの頂点の和が $N$ に等しい組み合わせにわたる。$J$ はそのような組み合わせを表す。また $M_1, M_2, \cdots$ は、それらの連結グラフの内同じグラフがある場合にはそれらの同じグラフの数を表している。上の $V_1$ が $M$ 個あるなら $\frac{1}{M!}$ の factor が付く。同じグラフが複数ある場合には上記の頂点の選び方では重複が出るからである。従って全ての $N$ について

和を取れば

$$\begin{aligned}\langle 0|Te^{-\frac{\lambda}{4!}\int_E \phi^4}|0\rangle &= \sum_N G^{(N)} \\ &= e^{V_1}e^{V_2}e^{V_3}\cdots \\ &= \exp\{V_1+V_2+V_3+\cdots\} \end{aligned} \tag{160}$$

となる。

一般的にラグランジアンに定数項がある時、定数項は宇宙項とよばれる。具体的には $\phi^4$ の場合でいえば作用は

$$S_E = -\int d_E^n x \left[\frac{1}{2}\phi(-\partial^2+m^2)\phi + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - \Lambda\right] \tag{161}$$

となる。生成汎関数が

$$\langle 0|Te^{-\int_E(\frac{\lambda}{4!}\phi^4-\Lambda)}|0\rangle = \int [d\phi]\exp\left[-\int d_E^n x\left[\frac{1}{2}\phi(-\partial^2+m^2)\phi+\frac{\lambda}{4!}\phi^4-\Lambda\right]\right] \tag{162}$$

一方で (160) より

$$\int d_E^n x\Lambda + \sum_i V_i \tag{163}$$

が摂動による補正が加わった宇宙項となる。つまり第 2 項が相互作用による補正である。一般的にラグランジアンの定数項 $-\mathcal{E}$ に対して、エネルギー密度（ハミルトニアン密度）は (24) より

$$T^{00} = \mathcal{E} \tag{164}$$

となる。これより宇宙項は真空の持つエネルギーと解釈できる。ここの場合には

$$\mathcal{E} = -\Lambda - \sum_i v_i \tag{165}$$

である。ただし $V_i = \int d_E^n x v_i$ である。即ち外線のないグラフは相互作用による真空のエネルギーへの量子補正とみなせる。

次に任意の頂点関数 $G^{(N)}(y_1,\cdots,y_n)$ は

$$\begin{aligned} G^{(N)}(y_1,\cdots,y_n) &= \frac{1}{N!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^N \underbrace{\int\cdots\int}_{=N\text{ 個}} d_E^n x_1\cdots d_E^n x_N \langle 0|T\phi(y_1)\cdots\phi(y_n)\phi^4(x_1)\cdots\phi^4(x_N)|0\rangle \\ &= \sum_{N_1+N_2=N} G_o^{(N_1)}(y_1,\cdots,y_n)\times G^{(N_2)} \end{aligned} \tag{166}$$

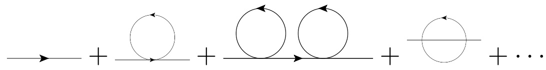
となる。ここで $G_o^{(N)}(y_1,\cdots,y_n)$ は $G^{(N)}(y_1,\cdots,y_n)$ の $N$ 次の order の摂動項の内、外線のあるグラフからの寄与。即ち外線の無いグラフを含まない。$G^{(N)}$ は上と同じで、外線のないグラフのみを含む。また $N_1+N_2=N$ である。和は $N_1+N_2=N$ となるグラフの組み合わせ全てにわたる。従って

$$G(y_1,\cdots,y_n) = G_o(y_1,\cdots,y_n)\langle 0|Te^{-\frac{\lambda}{4!}\int_E\phi^4}|0\rangle \tag{167}$$

従って規格化すれば外線のあるグラフのみを考慮すればよいことが分かる。

## 3.9 質量への量子補正

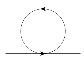
次にプロパゲータの相互作用による摂動項を計算する。摂動項まで含めると Feynman diagram は

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)e^{-\frac{\lambda}{4!}\int_E \phi^4}|0\rangle =$$  $$+\cdots \tag{168}$$

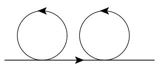
となる。以下では簡単のためフーリエ変換したものを表記することにする。まず主要項は

$$= \frac{1}{p^2+m^2} \tag{169}$$

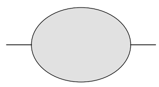
である。摂動の最初の項は

 $$= \frac{1}{p^2+m^2}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)G_E(0)\frac{1}{p^2+m^2} \tag{170}$$

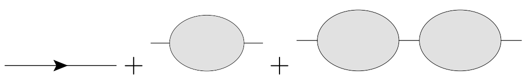
次の摂動項は

 $$= \frac{1}{p^2+m^2}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)G_E(0)\frac{1}{p^2+m^2}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)G_E(0)\frac{1}{p^2+m^2} \tag{171}$$

となるのが分かる。一般にプロパゲータの既約グラフの摂動項は

 $$= \frac{1}{p^2+m^2}\Sigma(p)\frac{1}{p^2+m^2} \tag{172}$$

のような形になる。プロパゲータは一般的に可約グラフまでいれると

$$\int d_E^n x\,\langle 0|T\phi(x)\phi(0)e^{-\frac{\lambda}{4!}\int_E \phi^4}|0\rangle\, e^{-ipx} =$$  $$+\cdots$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{p^2+m^2} + \left(\frac{1}{p^2+m^2}\right)^2\Sigma(p) + \left(\frac{1}{p^2+m^2}\right)^3\Sigma^2(p) + \cdots \\ &= \frac{1}{p^2+m^2-\Sigma(p)} \end{aligned} \tag{173}$$

となる。プロパゲータを $p^2$ の関数として見た時のの pole が物理的な $\phi$ 粒子の質量なので、このプロパゲータの pole、即ち

$$p^2+m^2-\Sigma(p) = 0 \tag{174}$$

の条件が物理的な質量 $m_{ph}$ を与える条件である。この時、pole の周りでテイラー展開した時に一般に最初の項には係数が付いてくる。即ち

$$p^2+m^2-\Sigma(p) = \frac{1}{Z}(p^2+m_{ph}^2)+\cdots \tag{175}$$

よってプロパゲータは

$$\int d_E^n x\,\langle 0|T\phi(x)\phi(0)e^{-\frac{\lambda}{4!}\int_E \phi^4}|0\rangle\, e^{-ipx} = \frac{Z}{p^2+m_{ph}^2} + (p^2+m_{ph}^2\text{の正則関数}) \tag{176}$$

となることが分かる。この時に現れてくる $Z$ が余分な係数なので、場 $\phi$ を $\phi_0 = Z^{\frac{1}{2}}\phi$ に置き換えて再定義することにより取り除く。詳しくは繰り込みの節で説明する。

## 3.10 繰り込みの前に

繰り込みを実際にやっていく前に、摂動の計算で現れる積分の発散を評価する一般的な方法を説明する。グラフの計算は一般的にグラフの中の 1 つのループに $l$ 個の内線があるとすると、積分は

$$F(p_1,\cdots,p_l)=\int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k-p_1)^2+m^2}\cdots\frac{1}{(k-p_l)^2+m^2} \tag{177}$$

を計算することになる。ガウス積分で書き変えて

$$\begin{aligned}F &= \int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}ds_1\cdots ds_l e^{-[(k-p_1)^2+m^2]s_1}\cdots e^{-[(k-p_l)^2+m^2]s_l}\\ &= \int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}ds_1\cdots ds_l\exp\Big[-\sum_i s_ik^2+2(\sum_i s_ip_i)k-\sum_i p_i^2s_i-m^2\sum_i s_i\Big]\end{aligned} \tag{178}$$

ここで積分変数を

$$s_1+\cdots+s_l=t\quad(0<t<\infty),\qquad s_i=t\alpha_i\quad(0<\alpha_i<1),\qquad\sum_i\alpha_i=1 \tag{179}$$

で置き換えれば

$$F=\int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-1}\exp\Big[-t(k-\sum_i p_i\alpha_i)^2+(\sum_i p_i\alpha_i)^2t-(\sum_i p_i^2\alpha_i)t-m^2t\Big]\delta(\sum_i\alpha_i-1) \tag{180}$$

ここで積分変数を $k$ から $k-\sum_i p_i\alpha_i$ に置き換えれば（$k$ は全空間にわたる変数なのでこの置き換えで測度は変わらない）

$$F=\int\frac{k^{n-1}dkd\Omega_n}{(2\pi)^n}d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-1}\exp(-tk^2-Mt)\delta(\sum_i\alpha_i-1) \tag{181}$$

ここで $M=-(\sum_i p_i\alpha_i)^2+(\sum_i p_i^2\alpha_i)+m^2$ と置いた。さらに計算すると

$$\begin{aligned}F &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}\int d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-\frac{n}{2}-1}e^{-Mt}\delta(\sum_i\alpha_i-1)\\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(l-\frac{n}{2})\int d\alpha_1\cdots d\alpha_l M^{\frac{n}{2}-l}\delta(\sum_i\alpha_i-1)\end{aligned} \tag{182}$$

従って内線の数 $l$ と次元数 $n$ に対して $l-\frac{n}{2}\le 0$ の時発散する。最終的には $n\to 4$ の極限を取るので $l\le 2$ で発散する。後で出てくるフェルミオンからなる内線がある場合には最高次数の項には最初の被積分関数に $k^{2\alpha}$ の factor が付く（$2\alpha$ はフェルミオンの内線の数であり、内線の数 $l$ はボソンとフェルミオンの両方の数である）。よってその場合には発散を表すガンマ関数は $\Gamma(l-\frac{n}{2}-\alpha)$ となる。よって $l-\alpha\le 2$ で発散する。さらに一般的な

$$F(p_1,\cdots,p_l)=\int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k-p_1)^2+m_1^2}\cdots\frac{1}{(k-p_l)^2+m_l^2}k^{2\alpha} \tag{183}$$

の場合で計算して確かめておこう。この場合には

$$F=\int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}ds_1\cdots ds_l k^{2\alpha}\exp\Big[-\sum_i s_ik^2+2(\sum_i s_ip_i)k-\sum_i(p_i^2+m_i^2)s_i\Big] \tag{184}$$

従って $M=-(\sum_i p_i\alpha_i)^2+(\sum_i(p_i^2+m_i^2)\alpha_i)$ と置き、

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{k^{n-1}dkd\Omega_n}{(2\pi)^n}d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-1}(k+\sum_i p_i\alpha_i)^{2\alpha}\exp(-tk^2-Mt)\delta(\sum_i\alpha_i-1)\\
&= (\frac{n}{2}+\alpha-1)\cdots(\frac{n}{2})\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}\int d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-\frac{n}{2}-\alpha-1}e^{-Mt}\delta(\sum_i\alpha_i-1)+\cdots\\
&= (\frac{n}{2}+\alpha-1)\cdots(\frac{n}{2})\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(l-\frac{n}{2}-\alpha)\int d\alpha_1\cdots d\alpha_l M^{\frac{n}{2}+\alpha-l}\delta(\sum_i\alpha_i-1)+\cdots
\end{aligned}\tag{185}$$

となる。またさらに被積分関数に $k^{2\alpha}$ の代わりに $k^\mu$ などの factor が付いていた場合には、

$$\begin{aligned}
F^\mu &= \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k-p_1)^2+m_1^2}\cdots\frac{1}{(k-p_l)^2+m_l^2}k^\mu\\
&= \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n}d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-1}(k+\sum_i p_i\alpha_i)^\mu\exp(-tk^2-Mt)\delta(\sum_i\alpha_i-1)
\end{aligned}\tag{186}$$

leading order は $k^\mu$ の奇関数になるので 0 となり、次の項からが効いてくるので $p_i^\mu$ が出て来て

$$\begin{aligned}
F^\mu &= \int \frac{k^{n-1}dkd\Omega_n}{(2\pi)^n}d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-1}\sum_i(p_i^\mu\alpha_i)\exp(-tk^2-Mt)\delta(\sum_i\alpha_i-1)\\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(l-\frac{n}{2})\int d\alpha_1\cdots d\alpha_l M^{\frac{n}{2}-l}\sum_i(p_i^\mu\alpha_i)\delta(\sum_i\alpha_i-1)
\end{aligned}\tag{187}$$

などとなる。最後に $k^\mu k^\nu$ の factor が付いている場合まで計算しておく。

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k-p_1)^2+m_1^2}\cdots\frac{1}{(k-p_l)^2+m_l^2}k^\mu k^\nu\\
&= \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n}d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-1}(k+\sum_i p_i\alpha_i)^\mu(k+\sum_i p_i\alpha_i)^\nu\exp(-tk^2-Mt)\delta(\sum_i\alpha_i-1)
\end{aligned}\tag{188}$$

leading order は

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n}d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-1}k^\mu k^\nu\exp(-tk^2-Mt)\delta(\sum_i\alpha_i-1)+\cdots\\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\int \frac{d_E^{n-1}k}{(2\pi)^n}d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-\frac{5}{2}}\delta^{\mu\nu}\exp(-tk^2-Mt)\delta(\sum_i\alpha_i-1)+\cdots\\
&= \frac{\delta^{\mu\nu}\pi^{\frac{n}{2}}}{2(2\pi)^n}\int d\alpha_1\cdots d\alpha_l dt\cdot t^{l-\frac{n}{2}-2}e^{-Mt}\delta(\sum_i\alpha_i-1)+\cdots\\
&= \frac{\delta^{\mu\nu}}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(l-\frac{n}{2}-1)\int d\alpha_1\cdots d\alpha_l M^{1+\frac{n}{2}-l}\delta(\sum_i\alpha_i-1)+\cdots
\end{aligned}\tag{189}$$

などと計算出来る。これは上の $k^{2\alpha}$ の factor が付いた時の $\alpha=1$ の結果に $\delta^{\mu\nu}$ をかけたものに等しい。$\mu$、$\nu$ について縮約すれば実際に $\alpha=1$ の結果と一致するのが分かる[3] 。後の項はこれまでの計算を使って求められる。

次に一般的に Feynman diagram 与えられた時に、そのグラフに対応する摂動項の発散を簡単に見積もる方法を説明する。ここではスカラー場だけの場合を考えることにする。グラフにあるスカラー場からなる内線の数を $I$、外線の数を $N$ と置き、ループの数を $L$ と置く。この時グラフの発散の次数 $D$ は naive には

$$D=nL-2I \tag{190}$$

[3]この一致は Minkovsky 時空へ戻しても成立していることに注意。(189) を Minkovsky 時空へ戻すにはまず Euclid 時空と Minkovsky 時空との間の変換行列で変換し、$\delta^{\mu\nu}$ を $\eta^{\mu\nu}$ へ代えてから、それをさらに $\eta_{\mu\nu}$ で縮約することになるが、$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}=\delta_\mu^\rho$ であるために、これの縮約を取れば、(185) に一致する。

となる。つまり naive には $D \geq 0$ の時発散する。$D = 0$ の時には $\sim \ln \Lambda$ の発散であり、$D = 2$ であれば $\sim \Lambda^2$ の発散である。つまりこの $D$ でどのようなグラフも発散するかしないかが naive には分かる。この $D$ は以下のように変形すればさらに分かりやすい。まず、グラフの中の線が $l$ 本出た頂点（つまり $\phi^l$ の相互作用）の数を $V_l$ と置くと、最初 $I$ 個あった積分が、頂点の数 $\sum_l V_l$ だけのデルタ関数によりなくなる。デルタ関数は最後に 1 つだけ残るので、結局

$$L = I - \sum_l V_l + 1 \tag{191}$$

だけの積分が残る。即ちそれはループの数である。また、各頂点から出る線を全てカウントしていけば $\sum_l lV_l$ 本になるが、明らかにそれは内線は 2 回、外線は 1 回づつカウントしていることになるので

$$\sum_l lV_l = 2I + N \tag{192}$$

となる。以上により (191)、(192) から (190) の $L$ と $I$ を消去すれば

$$D = n - \frac{n-2}{2}N + \sum_l \left( \frac{n-2}{2}l - n \right) V_l \tag{193}$$

が得られる。$n = 4$ と置けば

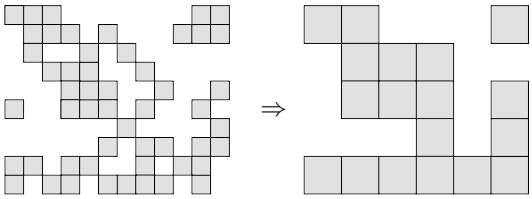
$$D = 4 - N + \sum_l (l-4)V_l \tag{194}$$

となる。これから $l > 4$ の相互作用がある場合には、摂動の高次の項においていくらでも $D$ が大きくなりうることが分かる。逆に $l \leq 4$ の相互作用しかない場合には、外線の数が 4 以下のものしか発散しないことが分かる。例えば前節までの例（$\phi^4$ の相互作用のある場合）では $l = 4$ のみであるので $D = 4 - N$ となる。外線の数が奇数のものは 0 となるので結局 $N = 0$（真空のエネルギー）、$N = 2$、$N = 4$ のみが発散しているのが分かる。このようにしてどのようなグラフが発散しうるかを naive に見積もることが出来る。従ってそれらだけを繰り込みで発散を取り除いてやれば、有限な結果が得られるのである。$l > 4$ の相互作用のある場合には外線の数 $N$ がいくら多くても発散するグラフが高次の摂動項において出てきてしまう。このような場合には延々と繰り込みを行っていっても一向に有限の値が得られないということになってしまう。このようなものを繰り込み不可能であるという。繰り込み不可能であっても物理的に意味のない理論であるという訳ではないが、そのような理論は一般的に言って、ある理論の有効理論であるとみなせる。そのような場合には摂動の高次の項まで計算することに意味がなくなってしまうのである。詳しい説明はここでは省略する。次の節では繰り込みについて説明する。

## 3.11 繰り込み

この節では繰り込みについて説明する。前節から分かるように一般的に摂動の計算には発散する項が含まれる。これらの発散は $k \to \infty$ の領域、即ちエネルギーの高い領域（紫外領域）で生じているのが分かる。繰り込みによりこれらの発散は systematic に取り除かれるが、繰り込みはただ発散を取り除くだけのものではない。繰り込みの一般的な概念は次のようである。例えば空間に、ある物理量が定義されているとし、その物理量は空間の”隣接する”点同士で相互作用をするとする[4]。まず、ある距離からこのように定義された現象を見た時には、その order での近接した領域通しが相互作用しているのが観察出来るだろう。さらにそこからもっと離れた距離から見た時には、さっきの距離から見た時よりも現象が”簡略化”して観察される。この”簡略化”という表現をもう少し詳しくいえば、近い距離から見た時の、ある点の近傍での相互作用の効果までをひっくるめて取り込んだものが、遠くから見た時のその点での物理量として観測されるという意味である。さらにもっと離れれば、さらに”簡略化”されて見える。

[4] これを近接相互作用という。これに対し、古典的な重力論、即ちニュートンの重力論のように空間的に離れた場所で相互作用するものを遠隔相互作用という。



上図は例えば平面上に格子状に粒子があり、その粒子の持つスピンが上向きの時は黒で、下向きの時は白で表したもの。左図が近くで見た時を表しており、右図が遠くで見た時のもの。右図は左図を簡略化して見ている。

このように考えると、理論をどのスケールで見るかによって、その現象が違って見えてくるというのが分かる。近くで見た時のある領域内の現象が、遠くで見た時のひとつの点での物理量として表されるのである。即ち、ある現象を表す理論はスケールをパラメータとして定義出来るのである。

ここで話を場の理論に戻せば、距離の次元はエネルギーの次元の逆数なので、距離のスケールを大きくすることは、エネルギーのスケールを小さくすることに対応する。逆に距離のスケールを小さくすることは、エネルギーのスケールを大きくすることに対応する。エネルギーのスケールには例えば典型的な実験のエネルギースケールを取ればよい。よってある現象を表す理論は高エネルギーに行けばいくほど小さい領域の現象を見ることになる。

では実際に以下で繰り込みを説明する。前節までで見たように、摂動の計算において一般的に発散する量が出てくる。よってこのままでは有限の量を得られないが、以下のようにして発散を取り除く処置を取る。まず、ラグラジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 \tag{195}$$

である。ここで $_0$ の意味は、ここまでのことで分かるように、一般にパラメータは量子補正を受けて（つまり摂動の計算により補正が加わるので）もとのパラメータから変わってしまう。よってそれと区別するために、もともとのラグラジアンのパラメータに $_0$ を付けている。場 $\phi$ にも $_0$ が付いているのは、前に見たように場も量子補正を受けるからである。これらの $_0$ が付いたものは、”裸の”パラメータ、もしくは場といわれる。これら裸の量を用いて理論を再定義する。これに対し、発散を取り除いた量を繰り込まれたパラメータ、もしくは場といわれる。裸の場 $\phi_0$ は繰り込まれた場 $\phi$ を使い

$$\phi_0 = Z^{\frac{1}{2}}\phi, \quad Z = 1 + \delta_Z \tag{196}$$

と書かれる。ここでその他のパラメータを繰り込まれたパラメータで表すのに注意が必要である。即ち、$n$ 次元 Euclid 時空のラグランジアンの次元はエネルギーの $n$ 乗になっている。従って場 $\phi$ の次元は $\frac{n}{2} - 1$ である。これから $\lambda_0$ の次元はエネルギーの $4 - n$ 乗となる。従って裸のパラメータは繰り込まれたパラメータを用いて

$$m_0^2 Z = m^2 + \delta_m, \quad \lambda_0 Z^2 = \lambda\mu^{4-n} + \delta_\lambda \mu^{4-n} \tag{197}$$

と書かれる。ここに $\mu$ はエネルギーの次元を持ったパラメータである。今はひとまずエネルギーの次元を持ったパラメータだと考えることにしよう。これら $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ はそれ自体が $n \to 4$ で発散する量であり、これらが摂動の計算で現れた発散と打ち消しあって有限の値を得られるようにするのである。これらの項をカウンター項という。繰り込まれた量を用いてラグランジアンを書きなおすと

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \quad = \quad & -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda\mu^{4-n}}{4!}\phi^4 \\ & -\frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\delta_m\phi^2 - \frac{1}{4!}\delta_\lambda\mu^{4-n}\phi^4 \end{aligned} \tag{198}$$

となる。最初の段は元のラグランジアンと同じ形である。しかしそこに現れる量は全て繰り込まれた量である。2 段

目はカウンター項であり、摂動の計算においてはこれらを相互作用の項のように扱い計算する。Feynman diagram は



$$= \frac{1}{k^2+m^2} \tag{199}$$

$$= -\lambda\mu^{4-n} \tag{200}$$



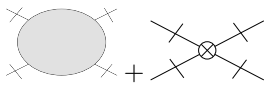
$$= -(\delta_Z k^2 + \delta_m) \tag{201}$$

$$= -\delta_\lambda \mu^{4-n} \tag{202}$$

下の 2 つがカウンター項であり、3 段目は 1 段目の質量の量子補正による発散を抑えるように、4 段目は 2 段目の量子補正による発散を抑えるように定める。

まず外線がないグラフ、即ち真空のエネルギーについては摂動論による補正が加わるが、繰り込みにはこれは考慮に入れる必要がない。規格化すれば完全に理論から取り除くことが出来るからである。

最初に 2 粒子の散乱振幅の繰り込みから説明する。即ち外線が 4 本ある 4 点頂点の繰り込みを行う。2 粒子の散乱振幅のカウンター項まで含めた摂動項は



$$\begin{aligned} &= \mathcal{M}_0(p_f \leftarrow p_i) - \delta_\lambda \mu^{4-n} \\ &= \mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i) \end{aligned} \tag{203}$$

となる。ここで $\mathcal{M}_0(p_f \leftarrow p_i)$ は繰り込まれる前の 2 粒子の散乱振幅であり、$\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i)$ は繰り込まれた後の 2 粒子散乱振幅である。摂動項に含まれる発散する量をカウンター項で差し引き、取り除くのであるが、取り除き方には任意性がある。そのため条件を課す必要がある。条件とし以下のものを考えよう。実験の典型的なエネルギースケールを $\mu_c$ で表す。前に定めた外線の運動量からなる変数 $s$、$t$、$u$ がある特定の $s_0$、$t_0$、$u_0$（無次元量）に対して $s_c = \mu_c^2 s_0$、$t_c = \mu_c^2 t_0$、$u_c = \mu_c^2 u_0$ としたとき、この時の散乱振幅を $-\lambda_c$ と置き、結合定数を $\lambda = \lambda_c$ と定める。即ち

$$\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i)|_{s_c=\mu_c^2 s_0, t_c=\mu_c^2 t_0, u_c=\mu_c^2 u_0} = -\lambda_c \tag{204}$$

と定める。このように一般的にカウンター項の任意性を除く条件を繰り込み条件という。ここで $\mu_c$ の取り方にはある程度の任意性が残る。従って $\mu_c$ の値を何に設定するかによって $\lambda_c$ の値は変わる。即ち $\lambda_c$ が $\mu_c$ に依存している。エネルギーの次元を持ったパラメータ $\mu$ もまた任意ではあるが、この理論の典型的なエネルギースケールと同程度の大きさを持ったパラメータだと仮定するのはごく自然なことである。従ってここでは $\mu = \mu_c$ と置く。また、この他にも $n \to 4$ での発散部分の pole のみを取り除く条件などもあるが、それは minimal subtruction などという。実際にこの条件のもとに計算してみる。話を分かりやすくするために結合定数を $\lambda_c$ に置き換えて計算する。散乱振幅は前に計算した通り、最初の摂動による量子補正（1 ループ）まで考慮すると

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i) &= \quad + \quad + \\ &= -\lambda_c \mu_c^{4-n} + \frac{(\lambda_c \mu_c^{4-n})^2}{2}[F(s) + F(t) + F(u)] - \delta_\lambda \mu_c^{4-n} \end{aligned} \tag{205}$$

であり、$F(-p^2)$ は

$$F(-p^2) = \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2+m^2} \frac{1}{(k-p)^2+m^2} \tag{206}$$

である。これは前の計算により

$$\begin{aligned} F(-p^2) &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(2-\frac{n}{2})\int d\alpha_1 d\alpha_2 [m^2-\alpha_2^2 p^2+p^2\alpha_2]^{\frac{n}{2}-2}\delta(\alpha_1+\alpha_2-1) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(2-\frac{n}{2})\int_0^1 d\alpha [m^2-(\alpha-1)\alpha p^2]^{\frac{n}{2}-2} \end{aligned} \tag{207}$$

従って繰り込み条件より、この order でのカウンター項は

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &= \frac{\lambda_c^2\mu_c^{4-n}}{2}[F(s_c)+F(t_c)+F(u_c)] \\ &= \frac{\lambda_c^2\mu_c^{4-n}}{2}\frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^1 d\alpha\Big([m^2+s_c(\alpha-1)\alpha]^{\frac{n}{2}-2}+[m^2+t_c(\alpha-1)\alpha]^{\frac{n}{2}-2}+[m^2+u_c(\alpha-1)\alpha]^{\frac{n}{2}-2}\Big) \end{aligned} \tag{208}$$

となる。さらに高次の摂動項まで計算すれば、さらに発散する項が出てくる。その場合にはカウンター項にさらに繰り込んでいく。$n\to 4$ の極限における値は、$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}==\frac{1}{s}+\acute{\Gamma}(1)+\mathcal{O}(s)=\frac{1}{s}-\gamma+\mathcal{O}(s)$ より

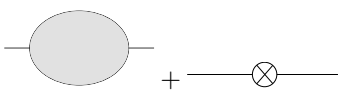
$$\delta_\lambda = -\frac{\lambda_c^2}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha\Big(\frac{6}{n-4}+3\gamma-\ln(4\pi\mu_c^2)^3+\ln[m^2+s_c(\alpha-1)\alpha]+\ln[m^2+t_c(\alpha-1)\alpha]+\ln[m^2+u_c(\alpha-1)\alpha]\Big) \tag{209}$$

となる。従って繰り込まれた 2 粒子の散乱振幅は $n=4$ の時、この order で

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_f\leftarrow p_i) = -\lambda_c - \frac{\lambda_c^2}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha\Big[&\ln\left(\frac{m^2+s(\alpha-1)\alpha}{m^2+s_c(\alpha-1)\alpha}\right)+\ln\left(\frac{m^2+t(\alpha-1)\alpha}{m^2+t_c(\alpha-1)}\right) \\ &+\ln\left(\frac{m^2+u(\alpha-1)\alpha}{m^2+u_c(\alpha-1)}\right)\Big] \end{aligned} \tag{210}$$

となる。この式を見ると、$s=\mu^2 s_0$、$t=\mu^2 t_0$、$u=\mu^2 u_0$ とおくと、エネルギースケール $\mu$ での散乱振幅と、エネルギースケール $\mu_c$ での散乱振幅との関係式となっているのがわかる。結合定数をエネルギースケールが $\mu$ の時の散乱振幅に等しいと置いて定義することもできた。即ち結合定数 $\lambda$ がエネルギースケール $\mu$ に依存するように定義する。特に $\mu=\mu_c$ の時に $\lambda=\lambda_c$ である。この解釈を行うと次のことがわかる。いったんエネルギーの典型的なスケール $\mu$ を $\mu_c$ に置き換え、結合定数を $\lambda_c$ に置き換えて計算を行った。それに応じてカウンター項が定まった。しかし、結合定数が常に上記の散乱振幅に等しくなるように定義してもよい。言い換えると、結合定数を $\lambda=\lambda_\mu$（$\lambda_\mu$ はここで考えた散乱振幅の値）に初めから設定しておけばよい。その場合にはエネルギーの典型的なスケールは $\mu$ であり、カウンター項は $\mu$ と $\lambda_\mu$ に依存するようになり、それで散乱振幅を計算した時には常に（結合定数への量子補正が常にカウンター項により打ち消されて）$\lambda_\mu$ になる。こう解釈して計算した場合にはこれまでの計算の $\mu_c$ を $\mu$ に置き換えて、$\lambda_c$ を $\lambda_\mu$ に置き換えればよく、実際、カウンター項には量子補正がそっくりそのまま取り込まれる。散乱振幅は常に $-\lambda_\mu$ に等しくなる。

次に外線が 2 個ある場合、即ちプロパゲータの繰り込みを行う。同様にエネルギースケールが $\mu_c$ であるとして、質量パラメータを $m_c$ とする。まず、カウンター項まで含めた摂動項は一般的に



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k^2+m_c^2}\left(\Sigma_0(k)-(\delta_Z k^2+\delta_m)\right)\frac{1}{k^2+m_c^2} \\ &= \frac{1}{k^2+m_c^2}\Sigma(k)\frac{1}{k^2+m_c^2} \end{aligned} \tag{211}$$

となる。ここで $\Sigma_0(k)$ は繰り込まれる前の量子補正であり、$\Sigma(k)$ は繰り込まれた後の量子補正である。見たとおり、ここでも取り除き方には任意性がある。従ってこれも繰り込み条件を課さないといけない。条件として最も自然なのは質量パラメータ $m_c$ が物理的な質量 $m_{ph}$ と一致するように定めることであろう。またプロパゲータの pole

の留数が 1 であるように定めれば $\delta_Z$ と $\delta_m$ が完全に定まる。即ち

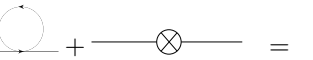
$$\int d_E^n x \, \langle 0|T\phi(x)\phi(0)e^{\int_E V^*}|0\rangle \, e^{-ikx} \quad = \quad \frac{1}{k^2+m_c^2} + (k^2+m_c^2\text{の正則関数})$$
$$\left( \quad = \quad \frac{1}{k^2+m_c^2-\Sigma(k)} \right) \tag{212}$$

である。ここで $V$ はカウンター項まで含めた相互作用の項でり、$V^*$ はそのディラック表示である。これは

$$\Sigma(k)|_{k^2+m_c^2=0} = 0, \quad \left.\frac{d\Sigma(k)}{dk^2}\right|_{k^2+m_c^2=0} = 0 \tag{213}$$

の条件に等しい。計算上はこちらの条件のほうが使い勝手がよい。

では実際に計算してみる。カウンター項まで含めた摂動項は 1 ループの order で

$\Sigma(k) =$  $=$
$$\begin{aligned} &= -\frac{\lambda_c \mu_c^{4-n}}{2} G_E(0) - (\delta_Z k^2 + \delta_m) \\ &= -\frac{\lambda_c \mu_c^{4-n}}{2} \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2+m_c^2} - (\delta_Z k^2 + \delta_m) \\ &= -\frac{\lambda_c \mu_c^{4-n}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma(1-\frac{n}{2}) (m_c^2)^{\frac{n}{2}-1} - (\delta_Z k^2 + \delta_m) \end{aligned} \tag{214}$$

従って繰り込み条件より

$$\delta_Z = 0, \quad \delta_m = -\frac{\lambda_c \mu_c^{4-n}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma(1-\frac{n}{2}) (m_c^2)^{\frac{n}{2}-1} \tag{215}$$

が得られる。2 ループの補正まで計算すれば（これは必然的に $\lambda^2$ の order となる）、$\delta_Z$ に $\neq 0$ の寄与が生じる。ここでも $m$ は $\lambda$ の時と同じ考えで $\mu$ に依存すると考えることができる。即ち、$\delta_m$ は常にそのエネルギースケールで定義された $m$ を用いて計算した時に得られるプロパゲータの pole が $m_{ph}$ に一致するように取るのである。この繰り込み条件は以下のように書くこともできる。

$$\delta_Z = \frac{d\Sigma_0}{dk^2}(-m_c^2) \tag{216}$$

$$\delta_m = \Sigma_0(-m_c^2) + m_c^2 \frac{d\Sigma_0}{dk^2}(-m_c^2) \tag{217}$$

ここでは $\Sigma_0$ は外線の運動量 $k$ に依存しない。しかし高次の量子補正を計算すると $k^2$ に依存するようになる。従って $\Sigma(k)$ がそっくり 0 とはならないかもしれない。その場合には散乱振幅の時と同様に外線の運動量を $k_c^2 = \mu_c^2$ としてから $\delta_Z$、$\delta_m$ を決定する。それから新たに $k^2 = \mu^2$ の場合を考えると、この時のプロパゲータの pole が繰り込まれた $m$ である。

ここまでは、無限大をカウンター項に繰り込む方法を説明した。これにより、有限の値を取るように定義できた。以下ではさらに発展して、繰り込み群について説明する。これは質量 $m$ より十分高いエネルギースケールでの振る舞いを定性的に説明することが出来る。またこの繰り込み群の方法により、冒頭で説明した簡略化の意味が理解できると思う。まず、上で求めた 2 粒子の散乱振幅 $\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i)$ に対し、（簡単のため）$s = t = u = \mu^2$ を代入したものを $-\lambda_\mu$ と置く。この $\mu$ がエネルギースケールを表す、エネルギーの次元を持ったパラメータとなる。この $\mu$ を繰り込み点という。ある適当な繰り込み点 $\mu = \mu_0$ での散乱振幅 $-\lambda_{\mu_0}$ を用いて $\lambda_\mu$ を表せば

$$-\lambda_\mu = -\lambda_{\mu_0} - \frac{3\lambda_{\mu_0}^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \ln\left(\frac{m^2+\mu^2(\alpha-1)\alpha}{m^2+\mu_0^2(\alpha-1)\alpha}\right) \tag{218}$$

これで $\lambda_\mu$ は求まっているのであるが、高エネルギー、即ち $\mu \gg m$ の場合に一般的な散乱振幅が $\mu$ とともにどう振る舞うかを後ほど見るために $\ln\mu$ での微分方程式を求めておく。摂動の計算は $\lambda^2$ の order まで計算したので微分方

程式は $\lambda^2$ の order までしか意味がない。$\frac{d}{d\ln\mu} = \mu\frac{d}{d\mu}$ に注意すれば微分方程式は簡単に求められ、

$$\mu\frac{d\lambda_\mu}{d\mu} = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_\mu^2 \tag{219}$$

が得られる。このように繰り込まれたパラメータの微分方程式を繰り込み群方程式という。この式のもっと簡単な導出の仕方はもともとの $\lambda_0 Z^2 = \lambda\mu^{4-n} + \delta_\lambda\mu^{4-n}$ が $\mu$ に依存しない、即ち $\frac{d(\lambda_0 Z^2)}{d\mu} = 0$ とすればよい。実際にこうして計算すると、($n = 4$ の近傍で)

$$\mu\frac{d\lambda}{d\mu} = (n-4)\lambda + \frac{3}{16\pi^2}\lambda^2 \tag{220}$$

が得られる。こちらの式のほうが $n = 4$ の近傍での振る舞いが入っているので良い。

同様に質量の繰り込み群方程式も $m_0^2 Z = m^2 + \delta_m$ が $\mu$ に依存しないという形で導かれる。$n = 4$ の近傍で

$$m_0^2 Z = m^2\left(1 - \frac{\lambda}{(4\pi)^2}\frac{1}{n-4}\right) \tag{221}$$

なのでこれを微分して $\lambda$ の一次まででまとめると、

$$\mu\frac{dm^2}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\lambda}{16\pi^2}m^2 \tag{222}$$

が得られる。

外場 $\rho$ を入れて考える場合にはラグランジアンには $\rho\phi$ の形で挿入されるので、場 $\phi$ が繰り込みを受けるので、裸の外場 $\rho_0$ に対し

$$\rho_0 = \rho Z^{-\frac{1}{2}} \tag{223}$$

となる。生成汎関数 $Z(\rho)$ は繰り込まれる前の裸のパラメータの関数でもあるが、同時に繰り込まれたパラメータの関数でもある。即ち

$$Z(\rho_0, \lambda_0, m_0) = Z(\rho, \lambda_\mu, m, \mu) \tag{224}$$

裸のパラメータはエネルギースケール $\mu$ に依存しないので、両辺を $\mu$ で微分すれば

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda_\mu)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \delta(m_\mu^2)\frac{\partial}{\partial m^2} + \gamma(\lambda_\mu)\int d_E^n x\rho(x)\frac{\delta}{\delta\rho(x)}\right)Z(\rho) = 0 \tag{225}$$

となる。これを $\rho(x_1), \rho(x_2), \cdots, \rho(x_N)$ で汎関数微分して $\rho = 0$ と置き、フーリエ変換すれば

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda_\mu)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \delta(m_\mu^2)\frac{\partial}{\partial m^2} + N\gamma(\lambda_\mu)\right)G(p_1, \cdots, p_N) = 0 \tag{226}$$

を得る。これを Callan-Symanzik 方程式という。ここで $\gamma(\lambda_\mu)$ は

$$\mu\frac{d}{d\mu}\rho = \gamma(\lambda_\mu)\rho \tag{227}$$

である。

ここまでは繰り込み条件を物理的なパラメータが得られるようにカウンター項を設定したが、その代わりに摂動の計算で現れる発散項のみ(有限項を残しておく)を最小限に取り除く方法も可能である。これは最少引き算(minimal subtruction)という。この繰り込み条件で計算してみる。まずラグランジアン (195) を見てみる。次元を 4 次元から $n$ 次元にしているために場 $\phi$ の次元がエネルギーの $\frac{n}{2} - 1$ 乗であることに注意する。よってパラメータ $\lambda_0$ の次元はエネルギーの $4 - n$ 乗となる。パラメータのエネルギー依存性をこの次元の調整として導入するのである。即ち

$$\lambda_0 Z^2 = \lambda\mu^{4-n} + \delta_\lambda \tag{228}$$

と修正する。上の摂動の計算は $\lambda$ を $\lambda\mu^{4-n}$ に置き換えればよい。(207) は

$$\begin{aligned} F(-p^2) &= \frac{\mu^{n-4}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(2-\frac{n}{2})\int_0^1 d\alpha\left(\frac{m^2-(\alpha-1)\alpha p^2}{\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}-2} \\ &= -\frac{\mu^{n-4}}{(4\pi)^2}\frac{2}{n-4}+\text{finite} \end{aligned} \tag{229}$$

と修正される。最少引き算ではこの pole の部分のみを繰り込む。散乱振幅 $\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i)$ は

$$\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i) = -\lambda\mu^{4-n}\left(1+\frac{3\lambda}{(4\pi)^2}\frac{1}{n-4}+\text{finite}\right)-\delta_\lambda \tag{230}$$

となる。従ってこの繰り込み条件の下では

$$\delta_\lambda = -\frac{3\lambda^2\mu^{4-n}}{(4\pi)^2(n-4)} \tag{231}$$

となる。繰り込み群方程式は裸の結合定数 $\lambda_0$ が $\mu$ に依存しないという条件から導かれる。裸の結合定数は

$$\lambda_0 Z^2 = \lambda\mu^{4-n}\left(1-\frac{3\lambda}{(4\pi)^2}\frac{1}{n-4}\right) \tag{232}$$

となる。$Z$ の $\mu$ 依存性が分からないので、この段階ではまだ繰り込み群方程式を導けない。質量の繰り込みを見てみる。(214) より

$$\begin{aligned} \Sigma(k) &= -\frac{m^2\lambda}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(1-\frac{n}{2})\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}-2}-(\delta_Z k^2+\delta_m) \\ &= -\frac{m^2\lambda}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{n-4}+\text{finite}\right)-(\delta_Z k^2+\delta_m) \end{aligned} \tag{233}$$

従って、最小引き算ではカウンター項は

$$\delta_Z = 0, \quad \delta_m = --\frac{m^2\lambda}{(4\pi)^2}\frac{1}{n-4} \tag{234}$$

となる。裸の質量は

$$m_0^2 Z = m^2\left(1-\frac{\lambda}{(4\pi)^2}\frac{1}{n-4}\right) \tag{235}$$

が得られる。さらにこの order では $Z=1$ である。(232)(235) のそれぞれに対し、裸のパラメータが $\mu$ に依存しないという条件より、

$$\mu\frac{d\lambda}{d\mu} = (n-4)\lambda+\frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}, \quad \mu\frac{dm^2}{d\mu} = \frac{\lambda}{(4\pi)^2}m^2 \tag{236}$$

が得られる。$n\to 4$ の極限を取れば、$\lambda$ の繰り込み群方程式は前に求めた繰り込み群方程式 (219) と同じ結果が得られる。注意しておくと、ここの繰り込まれたパラメータは物理的なパラメータ $m_{ph}$ や敷居値で定義した $\lambda$ や $\lambda_\mu$ とは当然異なる。最小引き算で定義したパラメータで書けば（物理的でない）質量パラメータの依存性まで見れる。この場合には散乱振幅の繰り込み群方程式は

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+\delta(\lambda)m^2\frac{\partial}{\partial m^2}+N\gamma(\lambda)\right)G(p_1,\cdots,p_N)=0 \tag{237}$$

ここで $\beta(\lambda)=\frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}$、$\delta(\lambda)=\frac{\lambda}{(4\pi)^2}$ と置いた。また、この order では $\gamma(\lambda)=0$ である。

この最小引き算で繰り込んだ場合には、$\beta(\lambda)$、$\gamma(\lambda)$、$\delta(\lambda)$ は $\lambda$ だけの関数になる。(223)、(227) より $Z^{-\frac{1}{2}}$ に対する微分方程式が導かれる。(223) に対し、$\rho_0$ が $\mu$ に依存しないという条件 $\mu\frac{d}{d\mu}\rho_0 = 0$ と (227) より

$$\begin{aligned} \mu\frac{d}{d\mu}Z^{-\frac{1}{2}} &= \Big((n-4)\lambda+\beta(\lambda)\Big)\frac{d}{d\lambda}Z^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\gamma(\lambda)Z^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{238}$$

これより

$$Z^{-\frac{1}{2}} = \exp\left(-\int_0^\lambda d\lambda\frac{\gamma(\lambda)}{(n-4)\lambda+\beta(\lambda)}\right) \tag{239}$$

$\rho_0 = \rho Z^{-\frac{1}{2}}$ が $\mu$ に依存しないという条件より、$\mu = \mu_0, \mu$ の 2 通りのエネルギースケールに対して $\rho_0$ を表した時、それらが等しいので

$$\rho(x,\mu) = \rho(x,\mu_0)\exp\left(\int_{\lambda(\mu_0)}^{\lambda(\mu)} d\lambda\frac{\gamma(\lambda)}{(n-4)\lambda+\beta(\lambda)}\right) \tag{240}$$

が得られる。ここで生成汎関数 $Z(\rho)$ もまたエネルギースケールの取り方に依存しないので $Z(\rho(x,\mu)) = Z(\rho(x,\mu_0))$ となり、これを $\rho(x,\mu)$ で $N$ 点 $x_1,\cdots,x_N$ で汎関数微分したものは $G(x_1,\cdots,x_N,\lambda(\mu),m^2(\mu),\mu^2)$ に等しく（散乱振幅の $\lambda, m^2, \mu^2$ 依存性をあらわに書いた)、また一方で (240) を用いて $\rho(x,\mu)$ での汎関数微分を $\rho(x,\mu_0)$ での汎関数微分に置き換えてフーリエ変換し、運動量空間へ移せば結局（$n\to 4$ の極限を取って）

$$G(p_1,\cdots,p_N,\lambda(\mu),m^2(\mu),\mu^2) = \exp\left(-N\int_{\lambda(\mu_0)}^{\lambda(\mu)} d\lambda\frac{\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)}\right)G(p_1,\cdots,p_N,\lambda(\mu_0),m^2(\mu_0),\mu_0^2) \tag{241}$$

となる。さらに散乱振幅 $G(p_1,\cdots,p_N)$ がエネルギーの $4-3N$ 乗の次元を持っているので、少なくとも高エネルギーの領域 $\mu \gg m$ では

$$G(p_1,\cdots,p_N,\lambda(\mu),m^2(\mu),\mu^2) = \mu^{4-3N}\mathcal{G}(q_1,\cdots,q_N,\lambda(\mu),\frac{m^2(\mu)}{\mu^2}) \quad (q_i = \frac{p_i}{\mu}) \tag{242}$$

の形になる。振幅のこのような振る舞いはスケーリング則と呼ばれる。従って散乱振幅は結局

$$G(\mu q_1,\cdots,\mu q_N,\lambda(\mu_0),m^2(\mu_0),\mu_0^2) = \mu^{4-3N}\exp\left(N\int_{\lambda(\mu_0)}^{\lambda(\mu)} d\lambda\frac{\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)}\right)\mathcal{G}(q_1,\cdots,q_N,\lambda(\mu),\frac{m^2(\mu)}{\mu^2}) \tag{243}$$

となる。ここで $q_i = \frac{p_i}{\mu}$ である。この散乱振幅を見れば $\mu$ が実際に典型的なエネルギースケールを表しているのが分かると思う。またこの式はそのエネルギースケールが変わった時に散乱振幅がどう変わっていくかを表している。これはまさに最初に説明したようにスケールを変えていくとどのように見え方が変わるかを表しているというのが分かる。特に注目すべき点は振幅に指数関数がかかっている点である。指数の部分は近似的にはエネルギースケールの対数 $\ln\mu$ に比例するが、比例定数は一般には整数にはならない。即ち振幅は全体としてエネルギーの整数乗数の次元を持たないことになる。これを異常次元という。この異常次元は繰り込み群を用いて計算した場合に一般的に現れるものであり、例えば統計力学において臨界現象を繰り込み群を用いて解析した時などにも現れる。

エネルギースケールを小さくしていった時の”簡素化”に対するイメージはここでは分かりにくいが、最初で説明した”簡素化”のイメージに近い繰り込みの処方もある。まず、運動量積分を $0\sim\Lambda$ のスケールに限定する。これは摂動の発散が高エネルギー部分（紫外領域という）から来るのが分かっているから発散が現れないように紫外領域を取り除いておくという正則化の一種である。同時にこれは、高エネルギーでの（即ち非常にミクロな領域）理論がどんなものであるか分からないということを反映しているともいえる。例えば、流体力学を例に出してみると、流体力学では流体が連続的に分布しているとみなして理論を立てる。しかしこの連続性は非常に小さい領域にまで及

んだ時に破たんする。分子構造が見えてきた時に流体としては扱えないからである。従って、流体として扱う場合には必然的にこれ以上の小さい領域は扱えないというカットオフが存在することになる。これはちょうど、場の理論での高エネルギーでの”カットオフ”$\Lambda$ に対応している。次に生成汎関数の場 $\phi$ の汎関数積分をエネルギースケールが $0 \sim b\Lambda$ の領域と $b\Lambda \sim \Lambda$ の部分とに分ける。そして後者の部分を積分してしまうのである。そのようにして得られる有効作用をさらに適当にスケール変換して $b$ を取り除き、見掛け上、もとの $0 \sim \Lambda$ までの積分領域を持った生成汎関数にする。このような繰り込みの方法を取ればその繰り込みをどのスケールまで行ったかでパラメータが変わってくる。このようにしても繰り込み群方程式が得られる。この繰り込みの方法は”簡素化”のイメージに非常に近いことが分かる。

## 3.12 有効作用

ここでは有効作用について説明する。本質的には有効作用に関する説明は”経路積分”note で全て出来ている。そこでの説明をそのまま場の理論に移せばよいだけである。

$$Z(\rho) = \int [d\phi] e^{i\int [\mathcal{L}+\phi\rho]} = e^{iW(\rho)} \tag{244}$$

とした時 $W(\rho)$ を自由エネルギーと呼ぶことにする。これは”経路積分”note によれば凸関数である。より対応を見やすくするには Euclid 時空へ移せばよい。また自由エネルギーをルジャンドル変換したもの、即ち

$$\Gamma(\langle\phi\rangle) := W(\rho) - \int d^n x \rho \langle\phi\rangle \qquad (\langle\phi\rangle := \frac{\delta}{\delta\rho(x)} W(\rho)\Big|_{\rho=0}) \tag{245}$$

により独立変数を $\rho$ から $\langle\phi\rangle$ に移したものを有効作用という。また、場の真空期待値 $\langle\phi\rangle$ の first order は古典解 $\phi_{cl}$ である。有効作用 $\Gamma$ を $\langle\phi\rangle$ で微分したものは

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\phi\rangle} = -\rho \tag{246}$$

であった。

## 3.13 対称性

### 3.13.1 対称性とは

まず対称性の意味を説明をする。物理において対称性という概念は様々な場面で現れてくる重要な概念である。例えば、古典力学で球対称なポテンシャルを持った系での粒子の運動を考える場合、ラグランジアンは球対称な対称性を持っている。即ち、ラグランジアンは座標系の $SO(3)$ による回転のもと不変である。このようにある群 $G$ による作用が定義出来る時、$G$ の元による変換のもとラグランジアンが不変である時、系に $G$ の対称性があるという。群 $G$ は有限群であったり、連続群であったりする。有限群は離散群ともいわれる。有限群により与えられる変換が離散的であるからである。有限群による対称性の例として、すでに見てきた $\phi^4$ の理論がある。ラグランジアン (195) を見れば、$\phi \to -\phi$ の置き換えのもとでラグランジアンが不変であることが分かると思う。この場合には群は $\mathbb{Z}_2$ である。連続群の対称性を持った例は次のラグランジアンを見てみればよい。場が $\phi_\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, N)$ と複数個ある実スカラー場の場合を考える。ラグランジアンが

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_\alpha)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi_\alpha\phi_\alpha - \frac{\lambda}{4!}(\phi_\alpha\phi_\alpha)^2 \tag{247}$$

（$\alpha$ に対しても和を取るものとする）の場合である。これは $SO(N)$ の対称性を持つ。即ち $U \in SO(N)$ とすれば

$$\acute{\phi}_\alpha = U_{\alpha\beta}\phi_\beta \tag{248}$$

の変換のもと不変である。

### 3.13.2 ネーターの定理

系に連続的な対称性を持つ場合には、保存量が存在する。それを以下で説明しよう。場 $\phi_\alpha$ に連続群 $G$ の作用が定義されてるとする。$G$ の作用による変分 $\phi_\alpha \to \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha$ のもとラグランジアンが不変であるとする。(6) より

$$0 = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)}\right)\right] \delta\phi_\alpha + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha\right] \tag{249}$$

ここで右辺第 1 項目はオイラー・ラグランジュ方程式により 0 となる。従って

$$\mathcal{J}^\mu \Delta t = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha \tag{250}$$

は保存カレントである（$\Delta t$ はこの微小変分の変化量を表す微小量である）。特にこの第 0 成分 $\mathcal{J}^0$ は保存量である。即ち $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$ である。これが古典的なネーターの定理である。$\mathcal{J}^\mu$ はネーターカレントといわれる。

ここで量子論の場合を見ていく。ここまでのことで分かるように、相互作用がある場合にももとのラグランジアンは相互作用のない自由なラグランジアンで定義し、相互作用項は摂動項として扱うので、量子論への formalism は自由場の理論として扱えることに注意する。まず $G$ の元を $U_t$ と書く。”量子力学”note によれば $U_t$ はシュレディンガー方程式

$$i\frac{d}{dt} U_t = \tilde{Q} U_t \tag{251}$$

を満たす。従って $U_t = \exp(-it\tilde{Q})$ となる。場 $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_N)$ に対する $G$ の作用はユニタリー変換

$$\phi_{t\alpha} = U_t \phi_\alpha U_t^\dagger \tag{252}$$

と変換し、ハイゼンベルグ方程式は

$$-i\frac{d}{dt}\phi_t = [\phi_t, \tilde{Q}] \tag{253}$$

となる。即ち $G$ の作用による場の変分は $\delta\phi_\alpha = i[\phi_\alpha, \tilde{Q}]\Delta t$ と書ける。ここでネーターカレントを見てみる。ネーターカレントの $\mathcal{J}^\mu$ の第 0 成分は

$$\mathcal{J}^0 \Delta t = -\pi_\alpha \delta\phi_\alpha \tag{254}$$

である。$\pi_\alpha$ は $\phi_\alpha$ の正準共役運動量である。ここで一般に場 $\phi_\alpha$ の変分 $\delta\phi_\alpha$ は $\phi_\alpha$ に対して場と同様に交換する。従って $\phi_\alpha$ と保存量との同時刻での交換関係は $[\phi_\alpha(x_1), \pi_\beta(x_2)] = i\delta_{\alpha\beta}\delta(x_1 - x_2)$ より

$$\frac{1}{i}[\phi_\alpha(x_1), \pi_\alpha(x_2)\delta\phi_\alpha(x_2)] = \delta\phi_\alpha(x_2)\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \tag{255}$$

となる。従って

$$\begin{aligned} \tilde{Q}\Delta t &:= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{J}^0 \Delta t \\ &= -\int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha \end{aligned} \tag{256}$$

となることが分かる。即ち連続的な対称性がある場合には、その対称性を反映した保存量が存在し、保存量を量子化したものはその対称性の生成子となる。さらに $\delta\phi_\alpha = ia_i T^i_{\alpha\beta}\phi_\beta \Delta t$ のように書ける場合には（これは $\phi$ に対する $G$ の作用 (252) の標準的な線形表現である。例えば $SU(N)$ の場合などこのようになっている）

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= a_i \underbrace{(-i)\int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_\alpha)} T^i_{\alpha\beta}\phi_\beta}_{=Q^i} \\ &= a_i Q^i \end{aligned} \tag{257}$$

と置けば

$$U_t = \exp(-i\tilde{Q}t) = \exp(-i\mathbf{a}\mathbf{Q}t) \tag{258}$$

となる。ネーターカレントは

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{\mu i} &:= -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}T^i_{\alpha\beta}\phi_\beta \\ Q^i &= \int d^3\mathbf{x}\mathcal{J}^{0i}\end{aligned} \tag{259}$$

である。

スカラー場の時に求めたハミルトニアンや運動量演算子などはこのネータカレントの例である。ハミルトニアンは時間並進対称性の、運動量は空間並進対称性の生成子である。ここでさらにネータカレントの例をあげておく。複素スカラー場のラグランジアンは $\phi \to e^{i\alpha}\phi,\ \phi^\dagger \to e^{-i\alpha}\phi^\dagger$ の位相変換により不変である。これは自由場はもちろん、$\phi^4$ の相互作用のある場合にもこの対称性を持っていることが分かる。この変換のネータカレントは自由複素スカラー場の場合

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^\mu &= -i(\pi\phi - \pi^\dagger\phi^\dagger) \\ &= -i\Big((\partial_0\phi^\dagger)\phi - (\partial_0\phi)\phi^\dagger\Big)\end{aligned} \tag{260}$$

である。従って保存量 $Q$ は

$$\begin{aligned}Q &= \int d^3\mathbf{x}\mathcal{J}^0 \\ &= -i\int d^3\mathbf{x}\Big((\partial_0\phi^\dagger)\phi - (\partial_0\phi)\phi^\dagger\Big) \\ &= -i\int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 2p_1^0 2p_2^0}(-ip_1^0)\Big((a^c(p_1)e^{ip_1x} - a^\dagger(p_2)e^{-ip_1x})(a(p_2)e^{ip_2x} + a^{c\dagger}(p_2)e^{-ip_2x}) \\ &\qquad -(a(p_1)e^{ip_1x} - a^{c\dagger}(p_1)e^{-ip_1x})(a^c(p_2)e^{ip_2x} + a^\dagger(p_2)e^{-ip_2x})\Big) \\ &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\Big(a^\dagger(p)a(p) - a^{c\dagger}(p)a^c(p) + \frac{1}{2}[a(p), a^\dagger(p)] - \frac{1}{2}[a^c(p), a^{c\dagger}(p)]\Big)\end{aligned} \tag{261}$$

となる。$\phi$ 粒子の数をプラスで、反 $\phi$ 粒子の数をマイナスでカウントすると約束した時、第三、四項の定数項を除けばこれはまさに調和振動子の個数演算子であることが分かる。ここで注意しておくことは、エネルギーは粒子も反粒子もプラスでカウントされるという点である。

### 3.13.3 Ward-高橋の関係式

場の量子論版ネータの定理である Ward-高橋の関係式を説明する。場 $\phi_\alpha$ が $\phi_\alpha \to U_{\alpha\beta}\phi_\beta$ の変換のもと対称性を持つと仮定する。或いはもっと一般に

$$\acute{\phi}_\alpha = \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha \tag{262}$$

の変換に対し、ラグランジアンが不変であるとする。即ち $\mathcal{L}(\phi_\alpha + \delta\phi_\alpha) = \mathcal{L}(\phi_\alpha)$ であるとする。さらにこの変換のもと汎関数積分の測度も不変、即ち $[d\acute{\phi}_\alpha] = [d\phi_\alpha]$ とする。すると当然ながら自由エネルギーも不変である。即ち

$$e^{iW(\rho_\alpha)} = e^{iW(\acute{\rho}_\alpha)}, \qquad \acute{\rho}_\alpha = \rho_\alpha + \delta\rho_\alpha \tag{263}$$

さらに

$$e^{i\Gamma} = \int [d\phi_\alpha] \exp\left( i \int (\mathcal{L} + \rho_\alpha(\phi_\alpha - \langle\phi\rangle_\alpha)) \right) \tag{264}$$

も不変である。或いは $\Gamma = W - \int \rho_\alpha \langle\phi_\alpha\rangle$ が不変である。一方で、この場合 $\langle\phi_\alpha\rangle \to \langle\phi_\alpha\rangle + \delta\langle\phi_\alpha\rangle$ の変換のもとで $\Gamma$ は

$$0 = \delta\Gamma(\langle\phi_\alpha\rangle) = \int d^4x \frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\phi_\alpha\rangle} \delta\langle\phi_\alpha\rangle \tag{265}$$

と変化する。ここで (246) より

$$\int d^4x \rho_\alpha \delta\langle\phi_\alpha\rangle = 0 \tag{266}$$

を得る。これが Ward-高橋の関係式の原形である。

もう少し形式的でない直接的な導き方もある。また上の説明は外場が汎関数積分の積分変数である場に依存している場合には適用できない。QED などのゲージ理論では外場が場に依存する。以下の導出はそのような場合にも適用出来る。それは汎関数積分から直接場の変分を取ればよい。即ち

$$\begin{aligned} 0 &= \int [d\phi_\alpha] \left( i \int d^4x \rho_\alpha \delta\phi_\alpha \right) \exp\left( i \int (\mathcal{L}(\phi_\alpha) + \rho_\alpha \phi_\alpha) \right) \\ &= i \int d^4x \langle 0 | T \rho_\alpha \delta\phi_\alpha e^{i\int (V^* + \rho_\alpha\phi_\alpha)} | 0 \rangle \end{aligned} \tag{267}$$

となる。どちらかというとこちらの方が実践的である。

上の汎関数積分からの導き方はもっと一般的な考え方も出来る。即ち場の変換に対してラグランジアンが $\mathcal{L}(\phi_\alpha + \delta\phi_\alpha) = \mathcal{L}(\phi_\alpha) + \delta\mathcal{L}(\phi_\alpha)$ と変化する時、汎関数積分の変化は変化前の汎関数積分と変化後の汎関数積分との差を取れば

$$\int [d\phi_\alpha] \delta\mathcal{L}(\phi_\alpha) \exp\left( i \int \mathcal{L}(\phi_\alpha) \right) = 0 \tag{268}$$

が得られる。これはもはやラグランジアンがこの変換で対称性を持たない場合にも適用出来る。これも Ward-高橋の関係式と呼んでもよいと思う。

### 3.13.4 自発的対称性の破れ

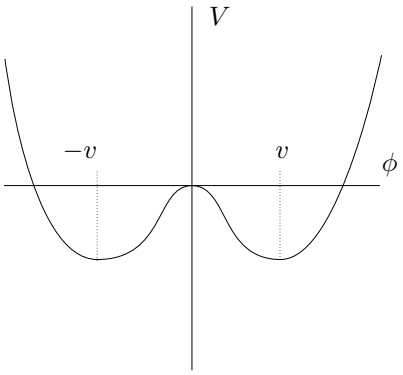
系に対称性がある時に、真空状態が対称性を破っている場合がある。次の例を見てみよう。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{269}$$

これはこれまで説明してきた $\phi^4$ の場合と同じラグランジアンであるが、質量項の符号が異なっている。このラグランジアンの簡単な古典解として $\phi(x) = v$ （$v$ は定数）の形の解がある。即ち

$$\begin{aligned} V(\phi) &:= -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \\ &= \frac{\lambda}{4!}(\phi^2 - v^2)^2 - \frac{\lambda v^2}{4!} \quad (v = \sqrt{\frac{6m^2}{\lambda}}) \end{aligned} \tag{270}$$

の最小値を与える $\phi = \pm v$ である。ここで $v^2$ は定数なので、$\pm v$ はオイラー・ラグランジュ方程式の解になっている。従って $\phi = \pm v$ でポテンシャル $V$ は最小値を持つ。この時作用も最小となるので生成汎関数はここでの値が一番効いてくる。




生成汎関数に一番効いてくる古典解がいわば、その理論の安定な真空となる。摂動論的には、その古典解の周りの量子補正を計算するからである。生成汎関数に一番効いてくるということは、naive にはポテンシャル（ここでは上に与えた $V(\phi)$ である）が最小になるところである。つまり、この場合には $\phi = \pm v$ のところが安定な真空である。$\phi = 0$（これも一応オイラー・ラグランジュ方程式の解であるので）も真空ではあるが、その真空は不安定になる。従って $\phi$ の真空期待値は first order では $\pm v$（どちらか）となると期待される。少なくとも、$\pm v$ の真空期待値を持つ 2 つの真空状態が存在しうる。

ここで与えたラグランジアンは明らかに $\phi \to -\phi$ の置き換えに関して不変である。このようにラグランジアンの場の置き換えに関して不変であることを、対称性があるという。しかし場 $\phi$ が真空期待値（first order で $v$ とする）を持つ時にはラグランジアンを $\phi = v$ 周りに展開すれば対称性が崩れてしまう。実際に計算すれば $\phi = \acute{\phi} + v$ と置けば

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \acute{\phi})^2 - \frac{1}{2}M^2\acute{\phi}^2 - \frac{\lambda v}{6}\acute{\phi}^3 - \frac{\lambda}{4!}\acute{\phi}^4 \qquad (M^2 = \frac{\lambda v^2}{3} = 2m^2) \tag{271}$$

となる。このようにもとのラグランジアンが対称性を持つ場合に、系の真空状態を 1 つ選んだ時に対称性が破れてしまうことを、自発的対称性の破れという。（ここで”経路積分”note より、このラグランジアンで散乱振幅を計算した結果はもとのラグランジアンで計算した結果と等しくなるはずである。ただし tad pole（外線の $\phi$ が 1 つだけのもの）だけは異なる。もとのラグランジアンの場合には 0 となり、$v$ の周りで展開したラグランジアンでは first order では $v$ となる。しかし、この場合にはもとのラグランジアンは質量項が負なので通常通りに計算すればプロパゲータが特異性を持ってしまい、計算出来ない。従ってこの場合には質量項も相互作用項に含めなければいけない。）対称性が破れた後にはこの展開したラグランジアンで計算することになる。またどちらのラグランジアンで計算しても（tad pole 以外の）散乱振幅が等しくなることにより、カウンター項は対称性が崩れる前のラグランジアンに対して加えればよいことになる。対称性が壊れた後にもカウンター項はちょうど、散乱振幅の発散を打ち消すように現れるからである。

ここまでが基本的な自発的対称性の破れの概観である。次に、場の連続的な変換のもとでラグランジアンが対称性を持つ場合を説明する。

### 3.13.5 ゴールドストーンの定理

次にゴールドストーンの定理を説明する。ラグランジアンを前の例で見た (247) のような場合である。場を $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_N)$ と書く。$N$ 次元ベクトル空間内の幾何学として捉えていく。ポテンシャル $V(\phi)$ に対し、これが上の例のように連続的な群 $G$ のもとでの対称性を持つと仮定する。さらに $V$ は $\phi_\alpha = \eta_\alpha$ で最小値を持つとする。即ち

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_\alpha}(\eta) = 0 \tag{272}$$

まず、$V$ の対称性を保つ変分 $\delta\phi_\alpha$ に対し

$$\begin{aligned} 0 &= \delta V(\phi) \\ &= \frac{\partial V}{\partial \phi_\alpha}(\phi)\delta\phi_\alpha \end{aligned} \tag{273}$$

さらに（$V$ の対称性を保つ変分に対する）2 次微小変分 $\delta^2 V$ は

$$\begin{aligned} 0 &= \delta^2 V(\phi) \\ &= \delta\phi_\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_\alpha \partial\phi_\beta}(\phi)\delta\phi_\beta + \frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha}(\phi)\delta^2\phi_\alpha \end{aligned} \tag{274}$$

従って $\phi = \eta$ では

$$\delta\phi_\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_\alpha \partial\phi_\beta}(\eta)\delta\phi_\beta = 0 \tag{275}$$

となる。次に $V(\phi)$ を $\eta$ の周りで展開すると

$$V(\phi) = V(\eta) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha}(\eta)}_{=0}\delta\phi_\alpha + \frac{1}{2}\delta\phi_\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_\alpha\partial\phi_\beta}(\eta)\delta\phi_\beta + \cdots \tag{276}$$

即ち (275) より、$\eta$ より出発するベクトル $\delta\phi_\alpha$ のうち、$V$ の対称性を保つ方向（方向は $N$ 次元ベクトル空間内での方向）に対応する新しい場（前節では $\acute{\phi}$ である。これはゴールドストーンモードといわれる）は質量が 0 となる。

次に対称性を保つ方向に対応する新しい場を具体的に求める。$G$ の元 $U_t = \exp(tT^i)$ $(t \in \mathbb{R},\ T^i$はGの生成子) により $\phi_t = U_t\phi$ と変換した時、その”無限小変換”は

$$\frac{d}{dt}\phi_t = T^i\phi_t \tag{277}$$

従って $\phi = \eta$ からの変分は $T^i\eta$ となる。即ち言い換えれば $\phi$ を $N$ 次元空間内のベクトルとして見れば、$\eta$ を原点と取り、$T^i\eta$ を基底ベクトルとして持つ任意のベクトルは $V$ を不変に保つことが分かる。ここで $T^i\eta$ の内、$T^i\eta = 0$ となる $T^i$ が存在する。これは幾何学的には $\eta$ を回転軸とする回転方向を意味している。$\eta$ 自身が軸となるので $T^i$ による回転のもと不変となるのである。回転のもと $\eta$ を不変に保つ $G$ の部分群を $H$ と置く。$\phi = \acute{\phi} + \eta$ と置けば ($\acute{\phi}$ が新しい場である)、$\acute{\phi}$ の関数と見た $V(\acute{\phi}+\eta)$ は群 $H$ による変換のもと不変である。即ちもともと持っていた対称性の群 $G$ が、$H$ へ落ちたことになる。$G$、$H$ の生成子からなる集合（Lie 代数）を $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{h}$ と置けば、$T^i\eta$ の内、0 でないものは $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の基底の数だけ存在する。これらが $\eta$ から出発する $V$ の対称性を保つ方向に対応する場である。

基底 $T^i\eta \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ をグラムシュミット直交化により直交化した正規直交基を $\mathbf{a}_i$ と置く[5]。

$$\acute{\phi}_\alpha \mathbf{a}_i^\alpha \tag{278}$$

は $\acute{\phi}$ の $V$ を不変に保つ方向ベクトル $\mathbf{a}_i$ の成分を表している。即ち

$$\acute{\phi} = \sum_{i:\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}} (\acute{\phi}\cdot\mathbf{a}_i)\mathbf{a}_i + \sum_{\text{他の基底}} (\acute{\phi}\cdot\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j \tag{279}$$

と書ける。つまりラグランジアンを $\acute{\phi}$ を用いて書き直せば、$\acute{\phi}\cdot\mathbf{a}_i$、$\acute{\phi}\cdot\mathbf{e}_j$ が新しい場となる。ここで $\eta$ は $V$ の最小値であり、$V$ が $G$ の変換のもと不変なので $\mathbf{a}_i$ 方向の成分の場 $\acute{\phi}\cdot\mathbf{a}_i$ に対する質量項は上のことから 0 となる。以上のことより、”連続群 $G$ により与えられる系の対称性が自発的に $H$ 破れた時、群 $G/H$ の生成子の数 $\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ だけ

[5] これは内積が定義出来るベクトル空間の場合にはこの方法でよい。内積が定義できないような場合には $T^i\eta$ は単に基底ベクトルとして扱えばよい。またこれらが線形独立であることは容易に示せる。

の 0 質量の粒子が生じる”ということが言える。これを南部ゴールドストーンの定理（NG 定理）という。また、この時現れる 0 質量粒子をゴールドストーン粒子（NG 粒子）という。

実際に上で与えたラグランジアン (247) で計算してみる。

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi_\alpha\phi_\alpha + \frac{\lambda}{4!}(\phi_\alpha\phi_\alpha)^2 \tag{280}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha}(\eta) &= (-m^2 + \frac{\lambda}{6}\eta^2)\eta_\alpha \\ &= 0\end{aligned} \tag{281}$$

従って

$$\eta_\alpha = \sqrt{\frac{6m^2}{\lambda}}e_\alpha \tag{282}$$

ここで $e_\alpha$ は $N$ 次元ベクトル空間の任意の単位ベクトルである。ここでは $e = (1, 0\cdots, 0)$ と選ぼう。従って対称性は $SO(N)$ から $SO(N-1)$ へ落ちたことになる。$\dim \mathfrak{so}(N)/\mathfrak{so}(N-1) = N-1$ なのでゴールドストーンモード（NG モード）は $N-1$ 個存在する。即ち $e$ 以外の全ての単位ベクトルが対応する。$V$ の 2 階微分を計算すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_\alpha\partial\phi_\beta}(\eta) &= \frac{\lambda}{3}\eta_\alpha\eta_\beta \\ &= 2m^2 e_\alpha e_\beta\end{aligned} \tag{283}$$

となる。同様の計算で

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^3 V}{\partial\phi_\alpha\partial\phi_\beta\partial\phi_\gamma}(\eta) = \frac{\lambda v}{3}(e_\alpha\delta_{\beta\gamma} + e_\beta\delta_{\alpha\gamma} + e_\gamma\delta_{\alpha\beta}) \quad (v = \sqrt{\frac{6m^2}{\lambda}}) \\ &\frac{\partial^4 V}{\partial\phi_\alpha\partial\phi_\beta\partial\phi_\gamma\partial\phi_\delta}(\eta) = \frac{\lambda}{3}(\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\delta}\delta_{\alpha\gamma} + \delta_{\delta\gamma}\delta_{\alpha\beta})\end{aligned} \tag{284}$$

と求まる。従ってラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\acute{\phi}_\alpha)^2 - \frac{1}{2}(2m^2)\acute{\phi}_1^2 - \frac{\lambda v}{3!}\acute{\phi}_1(\acute{\phi}_\alpha\acute{\phi}_\alpha) - \frac{\lambda}{4!}(\acute{\phi}_\alpha\acute{\phi}_\alpha)^2 \tag{285}$$

となる。まとめると、ゴールドストーンモードは $\acute{\phi}_\alpha$ $(\alpha = 2, 3, \cdots, N)$ であり、質量を持つモードは $\acute{\phi}_1$ であり、その質量は $2m^2$ である。

以上は実スカラー場で考えたが、複素スカラー場の場合にも同様の結果は成り立つ。具体的にラグランジアンが

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi_\alpha^\dagger\partial^\mu\phi_\alpha + m^2\phi_\alpha^\dagger\phi_\alpha - \frac{\lambda}{4}(\phi_\alpha^\dagger\phi_\alpha)^2 \tag{286}$$

の場合を考える。これは $SU(N)$ の対称性を持っている。ポテンシャルは

$$V(\phi) = -m^2\phi_\alpha^\dagger\phi_\alpha + \frac{\lambda}{4}(\phi_\alpha^\dagger\phi_\alpha)^2 \tag{287}$$

である。同様の議論を進めていくと

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha^\dagger} = (-m^2 + \frac{\lambda}{2}\eta^2)\eta_\alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha} = (-m^2 + \frac{\lambda}{2}\eta^2)\eta_\alpha^\dagger \tag{288}$$

より

$$\eta_\alpha = \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}}e_\alpha \qquad \left(v = \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}}\text{と置いておく}\right) \tag{289}$$

$e_\alpha$ はここでも $e=(1,0,\cdots,0)$ と選ぶことにする。今度は対称性が $SU(N)$ から $SU(N-1)$ へ落ちたことになる。$\dim \mathfrak{su}(N)/\mathfrak{su}(N-1)=2N-1$ である。ここで場の自由度は実変数でカウントしなければいけない。$N$ 次元複素ベクトル空間であるのでもともとの自由度は $2N$ 個である。このうちの $2N-1$ 個がゴールドストーンモードとなる。以下、順次計算すれば $V$ の二階微分は

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_\alpha^\dagger\partial\phi_\beta^\dagger}=\frac{\lambda}{2}\eta_\alpha\eta_\beta,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_\alpha\partial\phi_\beta}=\frac{\lambda}{2}\eta_\alpha^\dagger\eta_\beta^\dagger,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_\alpha^\dagger\partial\phi_\beta}=\frac{\lambda}{2}\eta_\beta^\dagger\eta_\alpha \tag{290}$$

三階微分は

$$\frac{\partial^3 V}{\partial\phi_\alpha^\dagger\partial\phi_\beta^\dagger\partial\phi_\gamma}=\frac{\lambda}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\eta_\beta+\delta_{\beta\gamma}\eta_\alpha),\qquad \frac{\partial^3 V}{\partial\phi_\alpha^\dagger\partial\phi_\beta\partial\phi_\gamma}=\frac{\lambda}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\eta_\beta^\dagger+\delta_{\alpha\beta}\eta_\gamma^\dagger) \tag{291}$$

最後に四階微分は

$$\frac{\partial^4 V}{\partial\phi_\alpha^\dagger\partial\phi_\beta^\dagger\partial\phi_\gamma\partial\phi_\delta}=\frac{\lambda}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta}) \tag{292}$$

である。従ってラグランジアンは

$$\mathcal{L}=-\partial_\mu\acute{\phi}_\alpha^\dagger\partial^\mu\acute{\phi}_\alpha-\frac{1}{2}(2m^2)h_1^2-\frac{\lambda v}{2}(\acute{\phi}_\alpha^\dagger\acute{\phi}_\alpha)\acute{\phi}_1^\dagger-\frac{\lambda v}{2}(\acute{\phi}_\alpha^\dagger\acute{\phi}_\alpha)\acute{\phi}_1-\frac{\lambda}{4}(\acute{\phi}_\alpha^\dagger\acute{\phi}_\alpha)^2 \tag{293}$$

となる[6]。ただし $\acute{\phi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(h_1+ih_2)$ と置いた。実際にゴールドストーンモードは実変数で換算して $2N-1$ 個存在することがわかる。

### 3.13.6 演算子法によるゴールドストーンの定理の導出

ゴールドストーンの定理を演算子法を用いても導くことが出来る。簡単のために対称性が $O(2)$ の場合で見てみる。場を

$$\begin{pmatrix}\sigma\\ \pi\end{pmatrix} \tag{295}$$

と書く。$O(2)$ の生成子を $Q$ とすると、

$$\begin{aligned}&[\pi(0),Q]=-i\sigma(0)\\ &[\sigma(0),Q]=i\pi(0)\end{aligned} \tag{296}$$

となる。今、仮にそれぞれの場の真空期待値が

$$\langle 0|\sigma(0)|0\rangle=v,\quad \langle 0|\pi(0)|0\rangle=0 \tag{297}$$

となったとする。この時

$$\begin{aligned}-iv &= \langle 0|[\pi(0),Q]|0\rangle\\ &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\Big[\langle 0|\pi(0)|\pi(p)\rangle\langle\pi(p)|Q|0\rangle-\langle 0|Q|\pi(p)\rangle\langle\pi(p)|\pi(0)|0\rangle\Big]\end{aligned} \tag{298}$$

[6] ここで複素数変数の関数 $f(z,z^*)$ に対してのテイラー展開は

$$f(z+w,z^*+w^*)=\exp\left(w\frac{\partial}{\partial z}\right)\exp\left(w^*\frac{\partial}{\partial z^*}\right)f(z,z^*) \tag{294}$$

である。これを展開すればそれぞれの微係数に付く係数がわかる。

$|\pi(p)\rangle$ は $\pi$ の運動量 $\mathbf{p}$ の固有状態である。ここで

$$\begin{aligned}\langle 0|Q|\pi(p)\rangle &= \int d^3\mathbf{x}\,\langle 0|\mathcal{J}^0(x)|\pi(p)\rangle \\ &= \int d^3\mathbf{x}\,\langle 0|\mathcal{J}^0(0)|\pi(p)\rangle\, e^{i(\mathbf{px}-p^0x^0)} \\ &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})\,\langle 0|\mathcal{J}^0(0)|\pi(p)\rangle\, e^{-ip^0x^0} \end{aligned} \tag{299}$$

従って

$$-iv = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p^0}\delta^{(3)}(\mathbf{p})\Big[\langle 0|\pi(0)|\pi(p)\rangle\,\langle\pi(p)|\mathcal{J}^0(0)|0\rangle\, e^{ip^0x^0} - \langle 0|\mathcal{J}^0(0)|\pi(p)\rangle\,\langle\pi(p)|\pi(0)|0\rangle\, e^{-ip^0x^0}\Big] \tag{300}$$

さらに通常通り $\langle 0|\pi(0)|\pi(p)\rangle = 1$ ととると、左辺が $x^0$ に依存しないので

$$\mathbf{p} = 0 \Rightarrow E = 0 \tag{301}$$

であり、

$$\langle 0|\mathcal{J}^0(0)|\pi(p)\rangle = ivp^0 \tag{302}$$

であれば等式が満たされるのが分かる。最初の条件は $\pi$ が質量 0 粒子であることを意味している。即ち $\pi$ はゴールドストーンモードである。第 2 の条件はローレンツ不変性より

$$\langle 0|\mathcal{J}^\mu(0)|\pi(p)\rangle = ivp^\mu \tag{303}$$

となる。即ちカレントがゴールドストーン粒子と結合する。

## 3.14 共鳴

ここまでは粒子の質量の計算 (212) において $k^2 + m^2 - \Sigma(k)$ が実数であると仮定してきた。これはその粒子が存在する状態が安定な状態である場合には正しい。不安定粒子である場合には相互作用による補正項 $\Sigma(k)$ に虚部が生じる。言い換えれば、虚部が生じればその粒子は不安定粒子であるということである。虚部が生じる場合にはプロパゲータは

$$\frac{1}{k^2 + m^2 - im\Gamma} + (k^2 + m^2\text{の正則関数}) \tag{304}$$

のような形になる。従ってフーリエ変換し、$x$ の関数で表せば（即ち $G(x)$）

$$\begin{aligned}\langle 0|T\phi(x)\phi(0)e^{i\int V^*}|0\rangle &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2 - im\Gamma} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} e^{-i\sqrt{E^2 - im\Gamma}t} \times \cdots \\ &\propto e^{-\frac{m\Gamma}{2E}t} \end{aligned} \tag{305}$$

となる（計算は「プロパゲータの積分の計算」の節を参照)。このプロパゲータの 2 乗 $|G|^2$ がよく知られてるように不安定粒子の崩壊確率の指数関数的振る舞いを表している。即ち

$$\tau = \frac{E}{m}\Gamma^{-1} \tag{306}$$

が平均寿命を表している。実際 $E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$ より静止系では $\tau = \Gamma^{-1}$ となる。また $|G(p)|^2$ を計算すれば（$s = -p^2$ と置いて）

$$|G(p)|^2 = \frac{1}{(s - m^2)^2 + m^2\Gamma^2} \tag{307}$$

となる。微分断面積はこれに比例することになるので、微分断面積は $s = m^2$ でピークを持つ。これを共鳴（resonance）という。

# 4 フェルミオン

## 4.1 Dirac フェルミオン

フェルミオンの場について説明する。フェルミオンはスピノール場により表される。従って時空はスピン多様体である必要があり、構造群はスピン群へと持ちあげられる。その同伴束としてのスピノール束を考える必要がある。Minkovsky 空間はそれが可能である。スピノールについての基礎的な説明は"クリフォード代数"note を参照のこと。スピノール束のファイバーが既約表現である時、そのスピノール場を Dirac 場ともいう。以下ではこの Dirac 場について説明する。計量がローレンツ計量 $\eta^{\mu\nu}$ で与えられる 4 次元ベクトル空間（Minkovsky 空間）を $V_M$ で表し、$SO(V_M) = SO(3,1)$ と書き、生成子全体からなる集合を $\mathfrak{so}(V_M) = \mathfrak{so}(3,1)$ と書くことにする。また、スピン群を $\mathrm{Spin}(V_M) = \mathrm{Spin}(3,1)$、生成子全体からなる集合を $\mathfrak{spin}(V_M) = \mathfrak{spin}(3,1)$ と書くことにする。クリフォード代数 $Cl(V_M) = Cl(3,1)$ の基底を $\gamma^\mu$ と書く[7]。従ってクリフォード代数の関係式

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu &= \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\ &= -2\eta^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{308}$$

である。"クリフォード代数"note で求めたように既約表現は Weyl 表示で

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{309}$$

で与えられる。これらは

$$\sigma^\mu_L = (1, -\sigma^i), \quad \sigma^\mu_R = (1, \sigma^i) \tag{310}$$

と置けば、

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_R \\ \sigma^\mu_L & 0 \end{pmatrix} \tag{311}$$

と書ける。$\mathfrak{spin}(3,1)$ の基底 $\mathcal{S}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ の表示は

$$\mathcal{S}^{ij} = -\frac{1}{4}g^{00}[\sigma^i, \sigma^j]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = i\frac{\varepsilon^{ijk}}{2}\sigma^k \tag{312}$$

$$\mathcal{S}^{0i} = -\frac{1}{2}g^{00}\sigma^i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\gamma^5\sigma^i \tag{313}$$

従って $\mathrm{Spin}(3,1)$ の元

$$D = e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}} = \begin{pmatrix} D_L & 0 \\ 0 & D_R \end{pmatrix} \tag{314}$$

によるスピノールの変換に対し、$x$ は対応する $SO(3,1)$ の元

$$\Lambda = ad(D) = e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \tag{315}$$

によりローレンツ変換する。ここで $D_L^\dagger = D_R^{-1}$、$D_R^\dagger = D_L^{-1}$ である。

[7]一般に n 次元の Minkovsky 時空の場合、即ち計量の 1 成分が $-1$ で他の成分は 1 の場合には $SO(V_M) = SO(n-1,1)$、$\mathfrak{so}(V_M) = \mathfrak{so}(n-1,1)$、$\mathrm{Spin}(V_M) = \mathrm{Spin}(n-1,1)$、$\mathfrak{spin}(n-1,1)$、$Cl(V_M) = Cl(n-1,1)$ と書く。

Dirac 場は

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \tag{316}$$

と書ける。$\chi_L$、$\chi_R$ はそれぞれ 2 成分である。$\chi_L$ は左巻き Weyl spinor、$\chi_R$ は右巻き Weyl spinor といわれる。この左巻きと右巻きの区別は chirality といわれる。スピノールの内積は計量

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{317}$$

により与えられた。これは $\gamma^0$ に等しいのでスピノールの計量を $\gamma^0$ と書く。Dirac 場の双対は従って

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \tag{318}$$

で与えられる。この記号のもと、スピノールの内積は

$$\bar{\psi}_1 \psi_2 = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle \tag{319}$$

で与えられ、スピノール束上の内積は

$$\begin{aligned} (\psi_1, \psi_2) &= \int_{V_M} * \langle \psi_1, \psi_2 \rangle \\ &= \int d^4x \bar{\psi}_1 \psi_2 \end{aligned} \tag{320}$$

で与えられる。

念のため Euclid 時空でのスピノールの内積も書いておく。詳しくは”クリフォード代数”note に書いてあるので参照のこと。Euclid 時空ではスピノールの計量は $e = 1$ で与えられるのでスピノールの内積は

$$\psi_1^\dagger \psi_2 = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle \tag{321}$$

で与えられた。通常の Minkovsky 時空との記号の整合性のために、Euclid 時空の場合には $\bar{\psi} := \psi^\dagger$ と置いてもよい。この内積のもとスピノール束はヒルベルト空間となる。

## 4.2 Weyl フェルミオン

”クリフォード代数”note でも説明したように一般に偶数次元多様対上ではスピノールは $W_n = W_n^L \oplus W_n^R$ と左巻きと右巻きとに分けることが出来た。ここではこれまでのようにひとつにまとめて Dirac フェルミオンとして扱うのではなく、左巻きと右巻きとに分けて Weyl フェルミオンを基本に考えてみる。まず

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \chi_R^\dagger & \chi_L^\dagger \end{pmatrix} \tag{322}$$

であるので左巻き $W_n^L$ と右巻き $W_n^R$ の関係は互いに相手の双対ベクトルとなっている。即ち $(W_n^C)^* = W_n^{\bar{C}}$ である。ここで $C = L, R$ であり、$\bar{C}$ は $C$ と反対の chirality を意味している。従ってスピノールの内積は

$$\chi_{\bar{C}}^\dagger \chi_C = \langle \chi_{\bar{C}}, \chi_C \rangle \tag{323}$$

などとなり、スピノール束の内積は

$$\begin{aligned} (\chi_{\bar{C}}, \chi_C) &= \int_{V_M} * \langle \chi_{\bar{C}}, \chi_C \rangle \\ &= \int d^4x \chi_{\bar{C}}^\dagger \chi_C \end{aligned} \tag{324}$$

で与えられる。

Spin(3, 1) の元 $D$ は (314) で与えられることから Weyl スピノールは $D_C\chi_C$ と変換する。Dirac スピノールの場合に $\gamma^\mu$ が Spin(3, 1) の変換のもと $D^\dagger\gamma^0\gamma^\mu D = \gamma^0 D^{-1}\gamma^\mu D = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^0\gamma^\nu$ であるので、$\sigma_C^\mu$ は $D_C$ により

$$D_C^\dagger\sigma_C^\mu D_C = \Lambda^\mu{}_\nu\sigma_C^\nu \tag{325}$$

と変換する。$\sigma_C^\mu : W_n^C \to W_n^{\bar{C}}$ と理解できる。従って

$$\langle\chi_C, \sigma_C^\mu\chi_C\rangle = \chi_C^\dagger\sigma_C^\mu\chi_C \tag{326}$$

はベクトル表現となる。言い方を変えれば、flat な Minkovsky 時空では

$$\chi_C^\dagger\sigma_C^\mu\partial_\mu\chi_C \tag{327}$$

は Spin(3, 1) の変換のもと不変である。

## 4.3 マヨラナフェルミオン

chirality が $C = R, L$ の Weyl フェルミオンを $\chi_{C\alpha}$ と書くことにする。ただし $\alpha$ は chirality が $C$ のスピノール $W_4^C$ の添え字である。ここでスピン群の chiral 表現 $D_C$ は $\det D_C = 1$ であるので

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\chi_{C\alpha}\chi_{C\beta} \tag{328}$$

はまた Spin(3, 1) の変換のもと不変である。このことは $\varepsilon^{\alpha\beta}\chi_{C\alpha}$ が $(W_4^C)^* = W_4^{\bar{C}}$ に属することを意味している。ただしここで注意が必要である。もしスピノールが通常の数（$\mathbb{R}$ とか $\mathbb{C}$ とか）であるならば (328) は 0 となってしまう。後に説明するようにスピノールは量子論ではグラスマン数となる（グラスマン数については”経路積分”note 参照)。従って 0 とはならない。以上により

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \varepsilon\chi_L^\dagger \end{pmatrix} \tag{329}$$

は通常の Dirac フェルミオン（スピノール $W_4$ の元）の表現と同じになる。スピノールをこのようにして定義したフェルミオンをマヨラナフェルミオンという。マヨラナフェルミオンはちょうどスカラー場での実スカラー場に対応する。つまり量子数を持たない、中性のフェルミオンはマヨラナフェルミオンとして記述される。

## 4.4 Dirac 方程式

次に Dirac 場の古典論について。相互作用のないラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(\frac{1}{i}\partial\!\!\!/ + m)\psi \qquad (*\mathcal{L} = - * \langle\psi, (\frac{1}{i}\partial\!\!\!/ + m)\psi\rangle = - * \langle\psi, (D + m)\psi\rangle) \tag{330}$$

（記号の意味、その他性質については”クリフォード代数”note 参照）である。$\psi$ の運動方程式は $\bar{\psi}$ の変分が 0 に等しいとして得られる。即ち

$$\begin{aligned} 0 &= (\frac{1}{i}\partial\!\!\!/ + m)\psi \\ &= \begin{pmatrix} m & \frac{1}{i}\sigma_R^\mu\partial_\mu \\ \frac{1}{i}\sigma_L^\mu\partial_\mu & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{331}$$

これを Dirac 方程式という。これを見たら分かるように異なる chirality のフェルミオンが質量項の存在により混合している。言い換えれば質量項は異なる chirality のフェルミオンの相互作用項ともいえる。特に $m = 0$ であれば混合しない。従って質量 0 のフェルミオンは左巻きのフェルミオンは右巻きのフェルミオンに変わることもないし、右巻きも左巻きに変わることはない。では Dirac 方程式の一般解を求めよう。スカラー場の時同様に、フーリエモードを求めて、それらの重ね合わせにより一般解が得られる。まず $e^{ipx}$ のモードから見ていく。$\psi$ が 4 次元ベクトルなので、フーリエモードも 4 次元ベクトルになる。それを $u(p)$ と書くと、Dirac 方程式より

$$(\not{p} + m)u(p) = 0 \tag{332}$$

ここで $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$ である。まず、静止系の場合に計算すると、静止系では運動量は $p_\mu = (-m, 0) =: q$ なのでこの条件式は

$$(p_0\gamma^0 + m)u(q) = m \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} u(q) = 0 \tag{333}$$

従ってこの場合には

$$u(q) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{334}$$

となる。ここで $\xi$ は 2 次元の任意の定スピノールである。$\sqrt{m}$ は convention である。従ってさらに $\xi_1 = (1, 0)$、$\xi_2 = (0, 1)$ の 2 通りの解が存在しうる。それぞれの $\xi$ に対して

$$u_s(q) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} \tag{335}$$

と置く。次に一般的な $p$ のモードに対しては、(333) 式を運動量が $q$ の系から $p$ の系へローレンツ変換すればよい。静止系から運動量が $p$ の座標系へのローレンツ変換（正確にはスピン群による変換）の Spin$(3, 1)$ の元を $D(p)$ と書けば、(333) 式に左から $D(p)$ をかけて

$$\begin{aligned} D(p)(q_\mu\gamma^\mu + m)u_s(q) &= D(p)(q_\mu\gamma^\mu + m)D^{-1}(p)D(p)u_s(q) \\ &= (q_\mu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\gamma^\nu + m)D(p)u_s(q) \\ &= (p_\mu\gamma^\mu + m)u_s(p) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{336}$$

となる[8]。ここで

$$u_s(p) := D(p)u_s(q) \tag{339}$$

である。ここで $\bar{u}_r(p) = u_r^\dagger(p)\gamma^0$ と $u_s(p)$ との内積を取ると

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(p)u_s(p) &= u_r^\dagger(p)\gamma^0 u_s(p) \\ &= u_r^\dagger(q)D^\dagger(p)\gamma^0 D(p)u_s(q) \\ &= u_r^\dagger(q)\gamma^0 D^{-1}(p)D(p)u_s(q) \\ &= 2m\delta_{rs} \end{aligned} \tag{340}$$

[8] ここで運動量のローレンツ変換についての注意をしておく。静止系での運動量を $q$、座標系を $a$ と書き、一般の座標系を $x$、運動量を $p$ と書く。静止系から $x$ 系へのローレンツ変換を $\Lambda$ と書く。すると

$$p_\mu x^\mu = p_\mu \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \tag{337}$$

となり、$q_\nu = p_\mu \Lambda^\mu{}_\nu$ となる。従って

$$p_\mu = q_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \tag{338}$$

となる。

を得る。さらに (336) の $^\dagger$ を取り、$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\dagger\mu}$ より

$$\bar{u}_s(p)(\not{p} + m) = 0 \tag{341}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r(p)\gamma^\mu u_s(p) &= \bar{u}_r(p)\gamma^\mu \left(\frac{-\not{p}}{m}\right) u_s(p) = \bar{u}_r(p) \left(\frac{-\not{p}}{m}\right) \gamma^\mu u_s(p) \\
&= -\frac{p_\nu}{2m}\bar{u}_r(p)\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}u_s(p) \\
&= \frac{p^\mu}{m}\bar{u}_r(p)u_s(p) \\
&= 2p^\mu\delta_{rs}
\end{aligned} \tag{342}$$

が得られる。

同様に今度は $e^{-ipx}$ のフーリエモードを計算しよう。今度は 4 次元ベクトルを $v(p)$ と書くと、Dirac 方程式より

$$(-\not{p} + m)v(p) = 0 \tag{343}$$

静止系 $q_\mu = (-m, 0)$ では

$$(-p_0\gamma^0 + m)v(q) = m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v(q) = 0 \tag{344}$$

従って今度は

$$v_s(q) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi_s \\ -\xi_s \end{pmatrix} \tag{345}$$

が得られる。後は先ほどの $u_s(p)$ とほぼ同様であり、

$$v_s(p) := D(p)v_s(q) \tag{346}$$

であり、

$$\bar{v}_r(p)v_s(p) = -2m\delta_{rs}, \quad \bar{v}_r(p)u_s(p) = 0, \quad \bar{u}_r(p)v_s(p) = 0 \tag{347}$$

が得られる。また

$$\bar{v}_r(p)(-\not{p} + m) = 0 \tag{348}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
\bar{v}_r(p)\gamma^\mu v_s(p) &= -\frac{p^\mu}{m}\bar{v}_r(p)v_s(p) \\
&= 2p^\mu\delta_{rs}
\end{aligned} \tag{349}$$

となる（これらの関係式はあくまでも全て on-shell、つまり $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ でのみ成立していることに注意)。従って 4 つの直交するベクトルが得られたので、これらで 1 の分割が得られる。即ち

$$1 = \frac{1}{2m}\sum_{s=1,2}\Big(u_s(p)\bar{u}_s(p) - v_s(p)\bar{v}_s(p)\Big) \tag{350}$$

が得られる。ここで $\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p)$ 及び $-\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p)$ は簡単に計算出来る。実際

$$\sum_{s=1,2} u_s(q)\bar{u}_s(q) = m\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = m + m\gamma^0 \tag{351}$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u_s(p)\bar{u}_s(p) &= \sum_s D(p)u_s(q)u_s^\dagger(q)D^\dagger(p)\gamma^0 \\ &= \sum_s D(p)(m\gamma^0 + m)\gamma^0 D^{-1}(p) \\ &= D(p)(m + m\gamma^0)D^{-1}(p) \\ &= m - D(p)\not{q}D^{-1}(p) \\ &= -\not{p} + m \end{aligned} \tag{352}$$

を得る。同様にして

$$-\sum_{s=1,2} v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} + m \tag{353}$$

が得られる[9]。以上よりフーリエモードを表す基底ベクトルがもとまった。即ち

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=1,2}\left(a_s(p)u_s(p)e^{ipx} + b_s(p)v_s(p)e^{-ipx}\right) \qquad (p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \tag{358}$$

が Dirac 方程式の一般解である。フェルミオンの量子論はこれを量子化することにより得られる。

## 4.5 フェルミオンの量子論

前節で相互作用のない Dirac 場を求めた。Dirac 場の量子化はスカラー場の場合と同様に生成消滅演算子により与えられる。即ち

$$\psi_+(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=1,2} u_s(p)a_s(p)e^{ipx} \tag{359}$$

$$\psi_+^{c\dagger}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=1,2} v_s(p)a_s^{c\dagger}(p)e^{-ipx} \tag{360}$$

[9]別の求め方もある。(350) 式に $(-\not{p} + m)$ をかければ

$$-\not{p} + m = \frac{-\not{p} + m}{2m}\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) \tag{354}$$

を得る。ここで簡単な計算により

$$\left(\frac{m \pm \not{p}}{2m}\right)^2 = \frac{m \pm \not{p}}{2m} \tag{355}$$

が分かる。即ち $m \pm \not{p}$ は射影演算子である。従って $\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p)$ は $\frac{m-\not{p}}{2m}$ の射影するベクトル空間への射影となっており、$\frac{m-\not{p}}{2m}$ に比例していることが分かる。これを $\alpha\frac{m-\not{p}}{2m}$ と置いて計算すれば $\alpha = 2m$ ともとまり、結局

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = -\not{p} + m \tag{356}$$

同様にして

$$-\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} + m \tag{357}$$

が得られる。

と書き

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_+(x) + \psi_+^{c\dagger}(x) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=1,2} \left( u_s(p) a_s(p) e^{ipx} + v_s(p) a_s^{c\dagger}(p) e^{-ipx} \right)\end{aligned} \tag{361}$$

が Dirac 場であり、反交換関係

$$\{a_s(p), a_r^\dagger(\acute{p})\} = \{a_s^c(p), a_r^{c\dagger}(\acute{p})\} = (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \acute{\mathbf{p}}) \delta_{sr} \tag{362}$$

であり他の組み合わせは 0、で与えられる。$\bar{\psi}(x)$ は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x) &= \psi^\dagger(x)\gamma^0 \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=1,2} \left( \bar{u}_s(p) a_s^\dagger(p) e^{-ipx} + \bar{v}_s(p) a_s^c(p) e^{ipx} \right)\end{aligned} \tag{363}$$

で与えられる。従って $\psi$ と $\bar{\psi}$ の反交換関係は

$$\begin{aligned}\{\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)\} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=1,2} \left[ u_s(p)\bar{u}_s(p) e^{ip(x_1-x_2)} + v_s(p)\bar{v}_s(p) e^{-ip(x_1-x_2)} \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \left[ (-\not{p} + m) e^{ip(x_1-x_2)} - (\not{p} + m) e^{-ip(x_1-x_2)} \right] \\ &= (\frac{1}{i}\not{\partial}_2 + m)(\Delta_+(x_1 - x_2) - \Delta_+(x_2 - x_1))\end{aligned} \tag{364}$$

従ってスカラー場の場合同様に $x_1$ と $x_2$ の関係が space-like の場合には 0 となり因果律を満たしている。もし生成消滅演算子の反交換関係が交換関係であれば、これは 0 とならなかった。つまりフェルミオンが反交換関係により量子化される理由はこの因果律のためである。

真空状態 $|0\rangle$ を

$$a_s(p)\,|0\rangle = 0, \quad a_s^c(p)\,|0\rangle = 0 \tag{365}$$

で定義する。従ってプロパゲータは

$$\begin{aligned}i\,\langle 0|T\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)|0\rangle &= \theta(x_1^0 - x_2^0) i\,\langle 0|\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)|0\rangle - \theta(x_2^0 - x_1^0) i\,\langle 0|\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1)|0\rangle \\ &= i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=1,2} \left[ \theta(x_1^0 - x_2^0) u_s(p)\bar{u}_s(p) e^{ip(x_1-x_2)} - \theta(x_2^0 - x_1^0) v_s(p)\bar{v}_s(p) e^{-ip(x_1-x_2)} \right] \\ &= i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \left( \theta(x_1^0 - x_2^0)(-\not{p} + m) e^{ip(x_1-x_2)} + \theta(x_2^0 - x_1^0)(\not{p} + m) e^{-ip(x_1-x_2)} \right) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon}(-\not{p} + m) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{\not{p} + m - i\varepsilon}\end{aligned} \tag{366}$$

となる（計算は付録のプロパゲータの積分の計算の節を参照のこと）。最初の等式の $T$ 積について、フェルミオン演算子の場合には時間順序を入れ替える時に $-$ 符号がつくように定義する。また、最後の段の $\frac{1}{\not{p}+m}$ の意味は $(\not{p}+m)$ の逆行列を意味している。

$\psi$ の正準共役運動量は $\pi = i\psi^\dagger$ であるのが分かる。従ってハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi\partial_0\psi - \mathcal{L} \\ &= -\frac{1}{i}\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi + \bar{\psi}(\frac{1}{i}\partial_\mu\gamma^\mu + m)\psi \\ &= \bar{\psi}(\frac{1}{i}\partial_i\gamma^i + m)\psi\end{aligned} \tag{367}$$

となる。従ってハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 4E_1E_2} \sum_{s,r=1,2} \Bigg[ \Big( \bar{u}_s(p_1) a_s^\dagger(p_1) e^{-ip_1x} + \bar{v}_s(p_1) a_s^c(p_1) e^{ip_1x} \Big)(-p_0\gamma^0) \\ &\qquad \times \Big( u_r(p_2) a_r(p) e^{ip_2x} - v_r(p) a_r^{c\dagger}(p) e^{-ip_2x} \Big) \Bigg] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} \sum_s E \Big[ a_s^\dagger(p) a_s(p) - a_s^c(p) a_s^{c\dagger}(p) \Big] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} \sum_s E \Big[ a_s^\dagger(p) a_s(p) + a_s^{c\dagger}(p) a_s^c(p) - \{ a_s^c(p), a_s^{c\dagger}(p) \} \Big] \end{aligned} \tag{368}$$

となる。ここでもまたフェルミオンが反交換関係により量子化されるべき理由を見ることが出来る。即ち、もし交換関係により量子化されていた場合に、$a^{c\dagger}$ を $b$ などと置き換えて $a$ と $b$ に対して交換関係を定義したとする。この場合にも因果律は保たれる。しかし、この場合にはエネルギーの式 (368) の中に $-b^\dagger(p)b(p)$ の項が出てきてしまう。即ちエネルギーが正定値にならない。エネルギーの最小値が定まらないので、真空は不安定となり、どこまでもエネルギーが負の状態へ落ちていくことになる。しかし、このように反交換関係により定義すると因果律も満たされてなおかつエネルギーも正定値であるようになる。

運動量は

$$\begin{aligned} P^i &= -\int d^3\mathbf{x} \pi \partial_i \psi \\ &= -i \int \bar{\psi} \gamma^0 \partial_i \psi \\ &= \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 4E_1E_2} \sum_{s,r=1,2} \Bigg[ \Big( \bar{u}_s(p_1) a_s^\dagger(p_1) e^{-ip_1x} + \bar{v}_s(p_1) a_s^c(p_1) e^{ip_1x} \Big)(p^i\gamma^0) \\ &\qquad \times \Big( u_r(p_2) a_r(p) e^{ip_2x} - v_r(p) a_r^{c\dagger}(p) e^{-ip_2x} \Big) \Bigg] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} \sum_s p^i \Big[ a_s^\dagger(p) a_s(p) + a_s^{c\dagger}(p) a_s^c(p) - \{ a_s^c(p), a_s^{c\dagger}(p) \} \Big] \end{aligned} \tag{369}$$

となる。

次にローレンツ変換を見てみよう。一粒子状態は

$$|\mathbf{p}, s\rangle = a_s^\dagger(p) |0\rangle \tag{370}$$

$$|\bar{\mathbf{p}}, \bar{s}\rangle = a_s^{c\dagger}(p) |0\rangle \tag{371}$$

で定義される。最初のが粒子が 1 つ存在する状態で、2 段目が反粒子が 1 つ存在する状態（反粒子状態）である。これらは運動量演算子の固有状態

$$P^\mu |\mathbf{p}, s\rangle = p^\mu |\mathbf{p}, s\rangle \tag{372}$$

$$P^\mu |\bar{\mathbf{p}}, \bar{s}\rangle = p^\mu |\bar{\mathbf{p}}, \bar{s}\rangle \tag{373}$$

である。スピノールの場合にはローレンツ群による変換の代わりにスピン群による変換になる。演算子のユニタリー変換は

$$U(\Lambda) a_s^\dagger(p) U^\dagger(\Lambda) = a_s^\dagger(\Lambda p) \tag{374}$$

で与えられる。従って

$$U(\Lambda)\psi(x)U^\dagger(\Lambda) = D(\Lambda^{-1})\psi(\Lambda x), \qquad U(\Lambda)\bar{\psi}(x)U^\dagger(\Lambda) = \bar{\psi}(\Lambda x) D^{-1}(\Lambda^{-1}) \tag{375}$$

ここで $D(\Lambda^{-1}) := D(p)D^{-1}(\Lambda p)$ は Spin(3,1) の元であり、その随伴表現はローレンツ変換 $ad(D(\Lambda^{-1})) = \Lambda^{-1}$ である。また 1 粒子状態はローレンツ変換のもと

$$U(\Lambda)\left|\mathbf{p},s\right\rangle = \left|\Lambda\mathbf{p},s\right\rangle, \qquad U(\Lambda)\left|\bar{\mathbf{p}},\bar{s}\right\rangle = \left|\Lambda\bar{\mathbf{p}},\bar{s}\right\rangle \tag{376}$$

と変換する。運動量の固有状態ベクトルの大きさは

$$\langle\mathbf{p},s|\acute{\mathbf{p}},r\rangle = (2\pi)^3 2p^0\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\acute{\mathbf{p}})\delta_{sr}, \qquad \langle\bar{\mathbf{p}},\bar{s}|\acute{\bar{\mathbf{p}}},\bar{r}\rangle = (2\pi)^3 2p^0\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\acute{\mathbf{p}})\delta_{sr}, \qquad \langle\mathbf{p},s|\acute{\bar{\mathbf{p}}},\bar{r}\rangle = 0 \tag{377}$$

となる。

場に真空状態をかければ

$$\begin{aligned}\psi(x)\left|0\right\rangle &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{s=1,2}e^{-ipx}v_s(p)\left|\bar{\mathbf{p}},\bar{s}\right\rangle\\ \bar{\psi}(x)\left|0\right\rangle &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{s=1,2}e^{-ipx}\bar{u}_s(p)\left|\mathbf{p},s\right\rangle\end{aligned} \tag{378}$$

及び

$$\begin{aligned}\left\langle 0\right|\psi(x) &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{s=1,2}e^{ipx}\left\langle\mathbf{p},s\right|u_s(p)\\ \left\langle 0\right|\bar{\psi}(x) &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{s=1,2}e^{ipx}\left\langle\bar{\mathbf{p}},\bar{s}\right|\bar{v}_s(p)\end{aligned} \tag{379}$$

が得られる。従って

$$\begin{aligned}\langle\bar{\mathbf{p}},\bar{s}|\psi(x)|0\rangle &= e^{-ipx}v_s(p), \qquad \langle\mathbf{p},s|\bar{\psi}(x)|0\rangle = e^{-ipx}\bar{u}_s(p)\\ \langle 0|\psi(x)|\mathbf{p},s\rangle &= e^{ipx}u_s(p), \qquad \langle 0|\bar{\psi}(x)|\bar{\mathbf{p}},\bar{s}\rangle = e^{ipx}\bar{v}_s(p)\end{aligned} \tag{380}$$

となる。

多粒子状態は

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{p}_1 s_1,\cdots,\mathbf{p}_n s_n,\bar{\mathbf{p}}_1\bar{r}_1,\cdots,\bar{\mathbf{p}}_m\bar{r}_m\right\rangle &= a^\dagger_{s_1}(p_1)\cdots a^\dagger_{s_n}(p_n)a^{c\dagger}_{r_1}(\bar{p}_1)\cdots a^{c\dagger}_{r_m}(\bar{p}_m)\left|0\right\rangle\\ \left\langle\bar{\mathbf{p}}_m\bar{r}_m,\cdots,\bar{\mathbf{p}}_1\bar{r}_1,\mathbf{p}_n s_n,\cdots,\mathbf{p}_1 s_1\right| &= \left\langle 0\right|a^c_{r_m}(\bar{p}_m)\cdots a^c_{r_1}(\bar{p}_1)a_{s_n}(p_n)\cdots a_{s_1}(p_1)\end{aligned} \tag{381}$$

で与えられる。1 の分割は

$$1 = \sum_{\substack{n=0\\m=0}}\frac{1}{n!m!}\int\sum_{\substack{s_1,\cdots\\r_1,\cdots}}\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{n,m}\left[\frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i}\frac{d^3\acute{\mathbf{p}}_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right]\left|\mathbf{p}_1 s_1,\cdots,\mathbf{p}_n s_n,\acute{\bar{\mathbf{p}}}_1\bar{r}_1,\cdots,\acute{\bar{\mathbf{p}}}_m\bar{r}_m\right\rangle\left\langle\bar{\mathbf{p}}_m\bar{r}_m,\cdots,\bar{\mathbf{p}}_1\bar{r}_1,\mathbf{p}_n s_n,\cdots,\mathbf{p}_1 s_1\right| \tag{382}$$

で与えられる。$n=m=0$ の項は真空状態である。また $\frac{1}{n!m!}$ の factor はスカラー場の場合と同じ理由でつく。

## 4.6 フェルミオンの汎関数積分による量子化

スカラー場の場合と同様にまず相互作用のない、自由な Dirac 場について、汎関数積分を使った量子化を説明する。フェルミオンの場合にはグラスマン数値関数となる（グラスマン数についての基本的な性質等については”経路積分”note を参照のこと）。生成汎関数は Dirac 表示で

$$Z(\eta,\bar{\eta}) = \langle 0|Te^{i\int(\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)}|0\rangle = \int[d\bar{\psi}][d\psi]e^{i\int[\mathcal{L}+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi]} \tag{383}$$

で与えられる。ここで $\eta$ は外場であり、$\psi$ ($\bar{\psi}$) も $\eta$ もグラスマン数値のスピノールである。ここで"経路積分"noteで決めた呼び方でいうと、経路積分表示に現れるスピノールはグラスマン束のファイバーでもある。スカラー場の時同様、$\eta = \bar{\eta} = 0$ の時に $Z(0) = 1$ と規格化しておけば

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = e^{i\bar{\eta}S\eta} \tag{384}$$

ここで $S$ は形式的に $(\frac{1}{i}\partial\!\!\!/ + m)$ の"逆行列"$(\frac{1}{i}\partial\!\!\!/ + m)^{-1}$ であり、

$$\begin{aligned} S(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipx}}{p\!\!\!/ + m - i\varepsilon} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-p\!\!\!/ + m}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} e^{ipx} \end{aligned} \tag{385}$$

である。従って $\eta$、$\bar{\eta}$ での汎関数（グラスマン）微分を行えば

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)} Z(\eta, \bar{\eta})\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = S(x_1 - x_2) \tag{386}$$

一方で左辺は

$$i \langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \tag{387}$$

に等しい。これは (366) に一致する。フェルミオンの場合の Wick's rule もスカラー場とほぼ同様である。ただ、グラスマン微分は順序を入れ替える時に $-$ 符号が出るのでそこだけ注意しないといけない。まず $n = 2m$ に対して

$$\left(\frac{1}{i}\right)^m \frac{\delta}{\delta\eta(x_n)} \cdots \frac{\delta}{\delta\eta(x_{m+1})} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_m)} \cdots \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} Z(\eta, \bar{\eta})\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = i^m \langle 0|T\psi(x_n) \cdots \psi(x_{m+1})\bar{\psi}(x_m) \cdots \bar{\psi}(x_1)|0\rangle \tag{388}$$

であり、(384) を用いて計算すれば

$$\text{左辺} = \sum_\pi i^m \varepsilon_\pi \langle 0|T\psi(x_{\pi_{m+1}})\bar{\psi}(x_m)|0\rangle \cdots \langle 0|T\psi(x_{\pi_n})\bar{\psi}(x_1)|0\rangle \tag{389}$$

と書ける。ここで $\pi$ は $m+1, m+2, \cdots, 2m$ の全ての並べ替え（置換）を表し、$\varepsilon_\pi$ は置換 $\pi$ が遇置換なら $+1$、奇置換ならば $-1$ となる。従って

$$i^m \langle 0|T\psi(x_n) \cdots \psi(x_{m+1})\bar{\psi}(x_m) \cdots \bar{\psi}(x_1)|0\rangle = \sum_\pi i^m \varepsilon_\pi \langle 0|T\psi(x_{\pi_{m+1}})\bar{\psi}(x_m)|0\rangle \cdots \langle 0|T\psi(x_{\pi_n})\bar{\psi}(x_1)|0\rangle \tag{390}$$

となる。スカラー場の場合と同じく $n$ が奇数の場合には振幅は 0 となる。

以上の計算からも分かるように、グラスマン微分の反可換性によりフェルミオンの振幅に関してはフェルミオンの場の順序を入れ替えると $-$ 符号が付くことに注意。

## 4.7 フェルミオンの Feynman rule

フェルミオンの場合の Feynman-rule を簡単に説明する。これはスカラー場の場合とほぼ同様である。ただ演算子が交換関係ではなく反交換関係で定義されているので、演算子の入れ替えの時に $-$ 符号が付いてくるところだけ注意しなければいけない。またスカラー場の場合と同様に、(140) を少し修正すればフェルミオンの場合の LSZ 簡約公式が導ける。スカラー場との違いは外線が運動量 $p$ の状態の場合には (380) で与えらる、指数と $u$（$v$) の積が対応するが、外線が $\bar{\psi}$ になると運動量積分の中は $\frac{-p\!\!\!/+m}{p^2+m^2} = \frac{u\bar{u}}{p^2+m^2}$ のようになり外線が運動量の状態のものに $\frac{\bar{u}}{p^2+m^2}$（$\frac{-\bar{v}}{p^2+m^2}$）をかけたものに等しいのが分かる。このことと Wick's rule とを合わせればフェルミオンの場合の Feynman-rule が理解できると思う。即ち、スカラー場の場合とほぼ同様であるが、反交換関係のため入れ替えた時には $-$ 符号がつくことと、外線が指数の代わりに (380) になることである。またフェルミオンの内線は $\frac{-p\!\!\!/+m}{p^2+m^2}$ となる。

## 4.8 湯川ポテンシャル

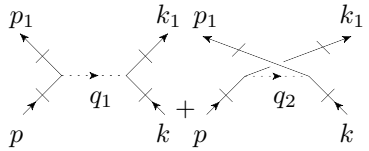
実スカラー場とディラック場の相互作用を説明する。相互作用のない実スカラー場の作用積分を $S_s$、相互作用のないディラック場の作用積分を $S_f$ と置く。作用積分 $S$ が

$$S = S_s + S_f - \int d^4x g\phi\bar{\psi}\psi \tag{391}$$

で与えられる場合を考える。最後の項が相互作用項であり、$g$ は結合定数である。この相互作用項を湯川相互作用という。この節での目的は非相対論的な量子力学においてボルン近似で求めた散乱振幅（遷移振幅）との比較を行い、湯川相互作用により生じるポテンシャルエネルギーを求めることである。2 つのフェルミオンの粒子がスカラー場を介して相互作用する場合の散乱振幅を求めたいので計算するべき振幅は、

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}_1 s_1, \mathbf{k}_1 r_1 | iT | \mathbf{k} r, \mathbf{p} s\rangle &= i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i)\mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i) \\
&= \langle \mathbf{p}_1 s_1, \mathbf{k}_1 r_1 | (-ig)T\int d^4x\phi\bar{\psi}\psi | \mathbf{k} r, \mathbf{p} s\rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{p}_1 s_1, \mathbf{k}_1 r_1 | \frac{1}{2!}(-ig)^2 T\int d^4x\phi\bar{\psi}\psi\int d^4y\phi\bar{\psi}\psi | \mathbf{k} r, \mathbf{p} s\rangle + \cdots
\end{aligned} \tag{392}$$

である。この摂動の最初の項は 0 になるのが分かる。従って最初に効いてくるのが第 2 項目である。Feynman-diagram でフェルミオンとスカラー場を区別するためにフェルミオンを実線で、スカラー場を点線で表すことにする。




$$\begin{aligned}
= \; & ig^2\Bigg(\bar{u}_{s_1}(p_1)u_s(p)\frac{1}{q_1^2 + m_s^2}\bar{u}_{r_1}(k_1)u_r(k) \\
& + \bar{u}_{r_1}(k_1)u_s(p)\frac{1}{q_2^2 + m_s^2}\bar{u}_{s_1}(p_1)u_r(k)\Bigg)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i)
\end{aligned} \tag{393}$$

ここで $q_1 = p_1 - p$ であり、$q_2 = k_1 - p$ であり、$m_s$ はスカラー場の粒子の質量である。ここでの目的は量子力学でのボルン近似との比較である。ボルン近似での計算では粒子がポテンシャルエネルギー $V$ での散乱を計算した。即ちポテンシャル $V$ を生じる粒子に、粒子をぶつけた時の散乱の計算である。従ってここでは 2 つのフェルミオンが区別できる別のフェルミオンであると仮定する。従って最初の Feynman-diagram がそれに対応するのでそれだけを考えればよい。さらに非相対論的な極限を考えれば外線の運動量は近似的に

$$\begin{aligned}
& p = (m_f, \mathbf{p}), \quad p_1 = (m_f, \mathbf{p}_1) \\
& k = (M_f, \mathbf{k}), \quad k_1 = (M_f, \mathbf{k}_1) \\
& q_1^2 = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}|^2 = |\mathbf{q}_1|^2
\end{aligned} \tag{394}$$

と置ける。またスピノールは近似的に静止系でのものに等しいので (335) で与えられる。従って比較するべき振幅は

$$i\mathcal{M} = ig^2\frac{1}{|\mathbf{q}_1|^2 + m_s^2}2m_f\delta_{s_1 s}2M_f\delta_{r_1 r} \tag{395}$$

である。これと”量子力学 2”note でディラック表示で求めたボルン近似の式の摂動項

$$\langle \mathbf{p}_1 | iT | \mathbf{p}\rangle = \frac{1}{i}\langle \mathbf{p}_1 | V | \mathbf{p}\rangle (2\pi)\delta(E_1 - E) \tag{396}$$

とを比べればよい。ここで (395) は試験粒子の運動量が確定した値を持っているとして計算しているが、ボルン近似では試験粒子の運動を考慮していない。従って試験粒子の運動量については (392) に $\int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 2M_f}$ をかけて積分しないといけない。それにより $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$ がなくなり、(395) の $2M_f$ の facotr がなくなる。さらに入射粒子に

ついては始状態ではそのままでいいが、終状態では運動量空間での $p_1$ の周りの微小領域での積分 $\int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2m_f}$ をかけて $p_1$ 周りの微小領域 $\Delta^3\mathbf{p}_1$ で積分しないといけないが、ボルン近似では微小領域での積分は $\int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}$ なので $\frac{1}{2m_f}$ の factor だけ異なり、従って (395) の $2m_f$ の facotr がなくなる。かくして対応

$$V(\mathbf{q}_1) := \langle \mathbf{p}_1|V|\mathbf{p}\rangle = \frac{-g^2}{\mathbf{q}_1^2 + m_s^2} \tag{397}$$

が得られる。これをフーリエ変換し、$x$ 空間へ移せばポテンシャルエネルギーが得られる。この計算は実質的に”量子力学 2”note で行った計算と全く一緒なので結果だけ書くと

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{r}e^{-m_s r} \tag{398}$$

となる。これを湯川ポテンシャルという。まず第一に – 符号がつくので、これは引力を表している。即ちスカラー場を仲介して相互作用するフェルミオン通しには引力が働くのが分かる。第二に $e^{-m_s r}$ の factor により、この引力がおよそコンプトン波長 $r \sim \frac{1}{m_s} = \frac{\hbar}{m_s c}$ 程度にしか届かないことが分かる。

# 5 ゲージ対称性

対称性の節で説明した通り、対称性とは理論物理において非常に重要な概念である。そこで与えたラグランジアン (247) は $SO(N)$ の対称性を持っていた。(247) のラグランジアンンの持っているような対称性は大域的な対称性といわれる。それは Minkovsky 時空の全ての点上の場に対して全く同じ変換を作用させることによりラグランジアンが不変になるからである。それに対し、局所的な対称性という概念がある。それは Minkovsky 時空の各点ごとに異なる変換を作用させて対称性を持っている場合である。即ち (248) の群の作用 $U$ が時空の関数 $U(x)$ となっている場合である。”ゲージ理論”note を読んでいれば分かるように、そのような対称性を記述するにはゲージ理論が必要になることが理解出来ると思う。以下ではゲージ理論の詳細は説明しない。それはすでに”ゲージ理論”note で説明しているからである。従ってゲージ理論については既知のものとする。ここではゲージ理論により記述される場の理論について説明をする。

ゲージ理論は素粒子論において非常に重要な概念である。QED（Quantum Electrodynamics：量子電磁力学）や弱い相互作用と量子電磁力学との統一理論である電弱統一理論、また強い相互作用を記述する QCD（Quantum Chromo Dynamics：量子色力学）などは全てゲージ理論である。これら基礎理論の違いは基本的には対称性の大きさのみである。QED は $U(1)$ の構造群により与えられる対称性で特徴づけられるゲージ理論であり、電弱理論は $SU(2)\times U(1)$ である。また QCD は $SU(3)$ である。さらには電弱理論と QCD とを統一した GUT（Grand Unification Theory：大統一理論）などは $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$ を含んだもっと大きな群のゲージ理論で記述される。

以下ではまず一番単純な構造群を持つ QED から説明をする。

## 5.1 QED

### 5.1.1 ゲージ場

まずラグランジアンを与える。まずフェルミオンのラグランジアンは自由なラグランジアン (330) の微分演算子を接続に置き換えることで与えられる。即ち

$$\mathcal{L}_f = -\bar{\psi}(\frac{1}{i}\not{\nabla} + m)\psi, \qquad \not{\nabla} = \gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) \tag{399}$$

$\not{\nabla}$ は”クリフォード代数”note によれば flat な時空での、構造群 $U(1)$ の接続により与えられるディラック作用素である。”ゲージ理論”note の定義によれば接続形式の成分はここでは $ieA_\mu$ である。物理でいうゲージ場とは factor

$ie$ を除いた $A_\mu$ のことである。$e$ は結合定数を与える。また $i$ は構造群が $U(1)$ であるので $\mathfrak{u}(1)$ が純虚数となることを反映している。ここでは接続形式とゲージ場を区別しておくが、本質的には同じである。ゲージ場 $A_\mu$ もまた力学変数であり、時空の関数であるので場である。即ちゲージ理論へ拡張したことで、フェルミオンのラグランジアンには自然にゲージ場との相互作用の項 $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ が生じることが分かる。

ゲージ場の自由ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (F := \nabla A = dA = \sum_{\mu<\nu} \underbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}_{=F_{\mu\nu}} dx^\mu \wedge dx^\nu) \tag{400}$$

$$*\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}F \wedge *F, \qquad S_M = \int_M *\mathcal{L}_M \tag{401}$$

で与えられる。これは電磁場のラグランジアンである。即ちゲージ場は電磁場を表している。これを量子化したものが光子（photon）と呼ばれる。オイラー・ラグランジュ方程式は作用 $S_M$ でゲージ場 $A_\mu$ の変分を取れば得られる。計算すれば

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{402}$$

となる。これは真空中での Maxwell 方程式である。ここでディラック場との相互作用項 $-eJ^\mu A_\mu$ ($J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$) までもを考慮した場合には相互作用項を含む電磁場のラグランジアンは自由ラグランジアン (400) に $-eJ^\mu A_\mu$ を加えたものになるが、その場合にはオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = eJ^\nu \tag{403}$$

となるが、これは外場 $J^\mu$ が存在する時の Maxwell 方程式である[10]。これまで同様に、この相互作用のない Maxwell 方程式の一般解を求める。相互作用のない Maxwell 方程式は $A_\mu$ を用いて書けば

$$(\partial^2\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu = 0 \tag{404}$$

と書ける。従って運動量 $p$ のフーリエモードは

$$\begin{aligned} 0 &= (-\eta^{\mu\nu}p^2 + p^\mu p^\nu)\varepsilon_\nu(p) \\ &= p^\mu p^\nu \varepsilon_\nu(p) \end{aligned} \tag{405}$$

を満たす（ここでゲージ場には質量項がないことに注意。従ってゲージ場は静止質量が 0 であり、$p^2 = 0$ である[11]）。ここで基準系として運動量が $q^\mu = (p, 0, 0, p)$ である系を取る。この時 (405) 式は

$$\begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix} \varepsilon(q) = 0 \tag{408}$$

従って $\varepsilon(q)$ は 3 通りの選び方が可能である。即ち $\varepsilon^1_\mu = (0, 1, 0, 0)$、$\varepsilon^2_\mu = (0, 0, 1, 0)$、$\varepsilon^3_\mu = (-1, 0, 0, 1)$ である。後はこれらを任意の運動量の系へローレンツ変換したものを重ね合わせをすればよいのだが、ここでゲージ理論では注意が必要である。それは $U = e^{ie\alpha(x)} \in U(1)$ によりゲージ変換をすることにより

$$\psi \to U\psi, \qquad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha \tag{409}$$

[10] ここで注意しておくが、カレント $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ はゲージ対称性のネーターカレントである。即ち古典的には $\partial_\mu J^\mu = 0$ と保存則を満たす。

[11] なんとなればローレンツゲージ

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{406}$$

を取れば上の Maxwell 方程式は波動方程式

$$\partial^2 A_\mu = 0 \tag{407}$$

となるが、これは静止質量 0 のスカラー場のクライン・ゴルドン方程式となることからこのことは正当化される。

と変換するが、この変換により $\psi$ の方は一般解に変わりはないが、ゲージ場の方は変わってしまう。即ち基準系ではフーリエモードが $q_\mu = (-p, 0, 0, p)$ に比例した成分だけの不定性が存在する。これはちょうど $\varepsilon^3_\mu = (-1, 0, 0, 1)$ のベクトルに比例している。従って最も naive にはその成分を打ち消すようにゲージ変換して、フーリエモードの成分が $\varepsilon^1$ と $\varepsilon^2$ だけであるようにすることが出来る。これは条件 $q^i\varepsilon^\lambda_i(q) = 0$ $(\lambda = 1, 2)$ と表すことが出来る。後は一般的な運動量 $p$ の座標系へは空間の回転 $R \in SO(3) \subset SO(3, 1)$ の元で変換すれば、エネルギーが $p$ で 3 次元運動量が $\mathbf{p} = R^{-t}\mathbf{q} = R\mathbf{q}$ の（即ち 4 次元運動量ベクトルが $p^\mu = (p, \mathbf{p})$ $(\mathbf{p}^2 = p^2)$ の）座標系へ移ることが出来る。この変換をしても空間成分のみの回転なので $\varepsilon^\lambda_\mu(p) := R_\mu{}^\nu\varepsilon^\lambda_\nu(q)$ $(\lambda = 1, 2)$ は時間成分が 0 のままである。条件は $p^i\varepsilon^\lambda_i(p) = 0$ となる。$x$ 表示では

$$\partial_i A^i = \mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \tag{410}$$

と表される。この条件式を放射ゲージまたはクーロンゲージという。以上の考察より電磁場は運動量の方向 $\mathbf{p}$ に直交する面内の、直交する 2 つのベクトルの重ね合わせで表されるという自由電磁場でのよく知られた結果が得られた。これらのベクトルを横偏極ベクトルという。残りの $p_\mu$ に平行なベクトル $\varepsilon^3_\mu(p) := R_\mu{}^\nu\varepsilon^3_\mu(q)$ ともう一つのこれらと独立なベクトル（これを $\varepsilon^0_\mu(p)$ と書くことにする。特に運動量が $q$ の基準系では $\varepsilon^0_\mu = (1, 0, 0, 1)$ であるとする）を縦偏極ベクトルという。以上により電磁場の一般解は

$$A_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{\lambda=1,2} \left( \varepsilon^\lambda_\mu(p) a_\lambda(p) e^{ipx} + (\varepsilon^*)^\lambda_\mu(p) a^\dagger_\lambda(p) e^{-ipx} \right) \tag{411}$$

で与えられる。注意しておくが、あくまでもこれは上で述べたように放射ゲージでの電磁場である。ゲージ変換すれば当然変わってしまう。

### 5.1.2 電磁場の量子論

電磁場を

$$A^+_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^\lambda_\mu(p) a_\lambda(p) e^{ipx} \tag{412}$$

$$A^-_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{\lambda=1,2} (\varepsilon^*)^\lambda_\mu(p) a^\dagger_\lambda(p) e^{-ipx} \tag{413}$$

と分ける。$A_\mu$ は

$$A_\mu = A^+_\mu + A^-_\mu \tag{414}$$

である。電磁場を量子化する時もこれまで同様に交換関係により定義する。即ち

$$[a_\lambda(p), a^\dagger_{\acute{\lambda}}(\acute{p})] = (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \acute{\mathbf{p}}) \delta_{\lambda\acute{\lambda}} \tag{415}$$

であり、他の組み合わせは 0 で与えられる。$A^+$ と $A^-$ との交換関係は

$$[A^+_\mu(x_1), A^-_\nu(x_2)] = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^\lambda_\mu(p) (\varepsilon^*)^\lambda_\nu(p) e^{ip(x_1 - x_2)} \tag{416}$$

ここで運動量が $q^\mu = (p, 0, 0, p)$ の基準系では

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1,2} (\varepsilon^*)^\lambda_i(q) \varepsilon^\lambda_j(q) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j \end{aligned} \tag{417}$$

($\hat{q}^i = \mathbf{q}/p = (0,0,1)$ である）で $\mu 0$ $(0\mu)$ 成分は 0 となる。従って一般の運動量 $p$ に対しても、この式を $q$ を $p$ に置き換えてそのまま成り立つ。従って

$$[A_i^+(x_1), A_j^-(x_2)] = (\delta_{ij} + \hat{\partial}_i\hat{\partial}_j)\Delta_+(x_1 - x_2) \tag{418}$$

となる（$\mu = 0$ もしくは $\nu = 0$ の場合には常に 0 となる)。ここで $\hat{\partial}_\mu$ の意味は $\hat{\partial}_\mu e^{ipx} = i\hat{p}_\mu e^{ipx} = ip_\mu/p^0 e^{ipx}$ を表している。これにより $A_\mu$ 通しの交換関係は

$$[A_i(x_1), A_j(x_2)] = (\delta_{ij} + \hat{\partial}_i\hat{\partial}_j)(\Delta_+(x_1 - x_2) - \Delta_+(x_2 - x_1)) \tag{419}$$

となる。ここでもやはり因果律の条件が成立する。プロパゲータは

$$\begin{aligned} i\langle 0|TA_i(x_1)A_j(x_2)|0\rangle &= i\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{\lambda=1,2}\left(\theta(x_1^0 - x_2^0)\varepsilon_i^\lambda(p)(\varepsilon^*)_j^\lambda(p)e^{ip(x_1-x_2)} + \theta(x_2^0 - x_1^0)\varepsilon_j^\lambda(p)(\varepsilon^*)_i^\lambda(p)e^{ip(x_2-x_1)}\right) \\ &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j}{p^2 - i\varepsilon}e^{ip(x_1-x_2)} \end{aligned} \tag{420}$$

（$A_0$ が入っているものは 0）となる。

$A_\mu$ の正準共役運動量は

$$\pi_\mu = F_{0\mu} = \partial_0 A_\mu - \partial_\mu A_0 = \partial_0 A_\mu \tag{421}$$

最後の等式は、放射ゲージを取っているので $A_0 = 0$ だからである。従ってハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_\mu\partial_0 A^\mu - \mathcal{L} \\ &= \partial_0 A_i\partial_0 A^i + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\partial_0 A_i\partial_0 A^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \end{aligned} \tag{422}$$

となり、ハミトニアンは $\mathbf{p}^2 = E^2$ に注意して

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x}\mathcal{H} \\ &= \int d^3\mathbf{x}\frac{1}{2}\left(\partial_0 A_i\partial_0 A^i + A_i(-\Delta\delta_{ij} + \partial_i\partial_j)A^j\right) \\ &= \int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 4E_1E_2}\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\acute{\lambda}=1,2}\Bigg[\left(\varepsilon_i^\lambda(p_1)a_\lambda(p_1)e^{ip_1x} - (\varepsilon^*)_i^\lambda(p_1)a_\lambda^\dagger(p_1)e^{-ip_1x}\right) \\ &\qquad\qquad \times(-E_1E_2)\left(\varepsilon_i^{\acute{\lambda}}(p_2)a_{\acute{\lambda}}(p_2)e^{ip_2x} - (\varepsilon^*)_i^{\acute{\lambda}}(p_2)a_{\acute{\lambda}}^\dagger(p_2)e^{-ip_2x}\right) \\ &\quad + \left(\varepsilon_i^\lambda(p_1)a_\lambda(p_1)e^{ip_1x} + (\varepsilon^*)_i^\lambda(p_1)a_\lambda^\dagger(p_1)e^{-ip_1x}\right)(\mathbf{p}_2^2)\left(\varepsilon_i^{\acute{\lambda}}(p_2)a_{\acute{\lambda}}(p_2)e^{ip_2x} + (\varepsilon^*)_i^{\acute{\lambda}}(p_2)a_{\acute{\lambda}}^\dagger(p_2)e^{-ip_2x}\right)\Bigg] \\ &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E}E\sum_{\lambda=1,2}\left(a_\lambda^\dagger(p)a_\lambda(p) + [a_\lambda(p), a_\lambda^\dagger(p)]\right) \end{aligned} \tag{423}$$

となる。同様に運動量は

$$\begin{aligned} P^i &= -\int d^3\mathbf{x}\pi^j\partial_i A_j \\ &= -\int d^3\mathbf{x}\int \frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 4E_1E_2}(E_1 p_2^i)\sum_{\lambda,\acute{\lambda}=1,2}\Bigg[\left(\varepsilon_j^{\lambda}(p_1)a_\lambda(p_1)e^{ip_1x}-(\varepsilon^*)_j^{\lambda}(p_1)a_\lambda^\dagger(p_1)e^{-ip_1x}\right) \\ &\qquad\qquad \times\left(\varepsilon_j^{\acute{\lambda}}(p_2)a_{\acute{\lambda}}(p_2)e^{ip_2x}-(\varepsilon^*)_j^{\acute{\lambda}}(p_2)a_{\acute{\lambda}}^\dagger(p_2)e^{-ip_2x}\right)\Bigg] \\ &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E}p^i\sum_{\lambda=1,2}\left(a_\lambda^\dagger(p)a_\lambda(p)+[a_\lambda(p),a_\lambda^\dagger(p)]\right) \end{aligned} \tag{424}$$

となる。ここで $aa$、$a^\dagger a^\dagger$ のような項はスカラー場の場合と同じで $\mathbf{p}_1$ の積分を先にやるか $\mathbf{p}_2$ の積分を先にやるかで符号が逆になるが、それらが等しいということから 0 となる。

1 粒子状態は

$$|\mathbf{p},\lambda\rangle = a_\lambda^\dagger(p)\,|0\rangle \tag{425}$$

で与えられる。これは運動量演算子の固有状態

$$P^\mu\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = p^\mu\,|\mathbf{p},\lambda\rangle \tag{426}$$

である。電磁場の場合には、ゲージ条件がローレンツ共変な形でないために一般的なローレンツ対称性を持っていない。かわりに、$SO(3)$ の対称性を持つ。$R\in SO(3)$ とすると

$$U(R)a_\lambda^\dagger(p)U^\dagger(R) = a_\lambda^\dagger(Rp) \tag{427}$$

で与えられる。従って

$$U(R)A_i(x)U^\dagger(R) = (R^{-1})_i{}^j A_j(Rx) \tag{428}$$

と変換する。また 1 粒子状態は回転のもと

$$U(R)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = |R\mathbf{p},\lambda\rangle \tag{429}$$

と変換する。運動量の固有状態ベクトルの大きさは

$$\langle\mathbf{p},\lambda|\acute{\mathbf{p}},\acute{\lambda}\rangle = (2\pi)^3 2p^0\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\acute{\mathbf{p}})\delta_{\lambda\acute{\lambda}} \tag{430}$$

となる。場に真空状態をかければ

$$\begin{aligned} A_\mu(x)\,|0\rangle &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{\lambda=1,2}e^{-ipx}(\varepsilon^*)_\mu^\lambda(p)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle \\ \langle 0|\,A_\mu(x) &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{\lambda=1,2}e^{ipx}\,\langle\mathbf{p},\lambda|\,\varepsilon_\mu^\lambda(p) \end{aligned} \tag{431}$$

が得られる。従って

$$\langle\mathbf{p},\lambda|A_\mu(x)|0\rangle = e^{-ipx}(\varepsilon^*)_\mu^\lambda(p) \tag{432}$$

$$\langle 0|A_\mu(x)|\mathbf{p},\lambda\rangle = e^{ipx}\varepsilon_\mu^\lambda(p) \tag{433}$$

が得られる。

多粒子状態は

$$|\mathbf{p}_1\lambda_1,\cdots,\mathbf{p}_n\lambda_n\rangle = a^\dagger_{\lambda_1}(p_1)\cdots a^\dagger_{\lambda_n}(p_n)\,|0\rangle$$
$$\langle\mathbf{p}_n\lambda_n,\cdots,\mathbf{p}_1\lambda_1| = \langle 0|\,a_{\lambda_n}(p_n)\cdots a_{\lambda_1}(p_1) \tag{434}$$

で与えられる。1 の分割は

$$1 = \sum_{n=0}\frac{1}{n!}\int\sum_{\lambda_1,\cdots}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i}\right]|\mathbf{p}_1\lambda_1,\cdots,\mathbf{p}_n\lambda_n\rangle\langle\mathbf{p}_n\lambda_n,\cdots,\mathbf{p}_1\lambda_1| \tag{435}$$

で与えられる。ここで和の $n=0$ の項は真空状態である。

### 5.1.3 汎関数積分による量子化

汎関数により量子化する方法はこれまでのスカラー場やディラック場ととほぼ同様であるのだが、そのまま電磁場のラグランジアンに対してこれまで通りにはいかない。それはスカラー場では $(-\partial^2+m^2)^{-1}$ が、ディラック場では $(\frac{1}{i}\partial\!\!\!/+m)^{-1}$ が存在し、それらがプロパゲータとして得られるのであったが、電磁場の場合には $(\partial^2\eta^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)$ の”逆行列”が存在しないからである。自由ラグランジアンの汎関数積分は”経路積分”note のガウス積分での表現の仕方で書けば

$$\int d^n\mathbf{x}e^{-\mathbf{x}M\mathbf{x}} \sim \sqrt{\frac{1}{\det M}} \tag{436}$$

と書けるが $M$ の逆行列が存在しないという条件は $\det M=0$ を意味しており、従って汎関数積分が有限の値を与えなくなると言い換えられる。この発散はラグランジアンがゲージ対称性を持っていることに起因している。つまりゲージ変換のもとでラグランジアンは不変であるため、電磁場の全ての配位に対して積分をした時に同じ被積分関数 $e^{iS}$ を無限に足し合わせているためである。このことをもう少し詳しく見てみる。(436) の行列 $M$ を対角化した時に

$$N = A^tMA = \begin{pmatrix} m_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & m_k & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \end{pmatrix} \tag{437}$$

($A^t=A^{-1}$) と書ける場合を考える。従って $\det M=0$ である。この表示の時に積分変数が $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ となるとすると (436) の左辺は $\det A=1$ より

$$\int d^n\mathbf{y}e^{-\mathbf{y}N\mathbf{y}} = \int d^n\mathbf{y}e^{-\sum_{i=1}^k m_i y_i^2} \tag{438}$$

となるが、$y_{k+1}$ から $y_n$ までの積分に対しては被積分関数が積分変数によらないためこの積分は発散するという事情と似ている。

ゲージ場はゲージ変換のもと (409) のように変換する。適当なゲージ場 $A_\mu$ で固定した時 $\alpha$ でゲージ変換した後のゲージ場を

$$A^\alpha_\mu := A_\mu - \partial_\mu\alpha \tag{439}$$

と置けば、発散は $\alpha$ の汎関数積分により生じる。実際にこれを見るには、まず $A^\alpha_\mu$ に作用する適当な線形作用素 $F^\mu$ により

$$F^\mu A^\alpha_\mu = B \tag{440}$$

の形でゲージ条件が与えられたとする。例えばローレンツゲージは $\partial^\mu A_\mu = 0$ であるが、この場合は $F^\mu = \partial^\mu$ で $B = 0$ である。この時

$$\int [d\alpha]\delta(F^\mu A^\alpha_\mu - B)\det\left(\frac{\delta(F^\mu A^\alpha_\mu)}{\delta\alpha}\right) = 1 \tag{441}$$

がゲージ変換の自由度に関する積分である。これは有限次元のデルタ関数の積分

$$\int d^n\mathbf{x}\delta^{(n)}(M\mathbf{x} - \mathbf{y})\det M = 1 \tag{442}$$

の類似である。ここで

$$\frac{\delta(F^\mu A^\alpha_\mu)}{\delta\alpha} = -F^\mu\partial_\mu \tag{443}$$

であるので、$M := -F^\mu\partial_\mu$ は $\alpha$ にも $A_\mu$ にも依存しないことに注意。(441) を汎関数積分に挿入すればと置けば

$$\begin{aligned} Z(J^\mu) &= \int [dA_\mu]e^{i\int \mathcal{L}_M(A_\mu)} \\ &= \det M\int [d\alpha][dA_\mu]\delta(F^\mu A^\alpha_\mu - B)e^{i\int \mathcal{L}_M(A_\mu)} \end{aligned} \tag{444}$$

ここで汎関数積分変数 $A_\mu$ を $A^\alpha_\mu$ に変えても測度は $[dA_\mu] = [dA^\alpha_\mu]$ と変わらない。またラグランジアンもゲージ不変性のため $\mathcal{L}_M(A_\mu) = \mathcal{L}_M(A^\alpha_\mu)$ と変わらない。積分変数 $A^\alpha_\mu$ を $A_\mu$ と書きなおせば

$$Z(J^\mu) = \det M\left(\int [d\alpha]\right)\int [dA_\mu]\delta(F^\mu A_\mu - B)e^{i\int \mathcal{L}(A_\mu)} \tag{445}$$

即ち汎関数積分はゲージ固定条件 (440) を満たす配位のみをまず積分し、さらにゲージ変換の自由度だけ同じものを積分していることがあらわになった。汎関数積分の発散の原因である $\int[d\alpha]$ をこれから取り除けばよい。以下ではこの factor と、汎関数積分になんら影響を及ぼさない $\det M$ を取り除いたものを新たに $Z(J^\mu)$ と定義しなおすことにする。この無視した factor $\det M$ は非可換ゲージ理論の量子化の時には無視することが出来ないのだが、ここではこれ以上触れないで非可換ゲージ理論の節で説明することにする。

これをさらに変形する。まず $B$ は任意の関数なので

$$\int [dB]e^{-\frac{i}{2\xi}\int B^2} = 1 \tag{446}$$

（測度 $[dB]$ には等式が成り立つような適当な factor を含ませている）を挿入出来る。ここで $\xi$ は任意である。従って $B$ 汎関数積分を行うと、外場との相互作用の項 $J^\mu A_\mu$ を入れておけば

$$\begin{aligned} Z(J^\mu) &= \int [dA_\mu][dB]\delta(F^\mu A_\mu - B)\exp\left(i\int(\mathcal{L}_M - \frac{1}{2\xi}B^2 + J^\mu A_\mu)\right) \\ &= \int [dA_\mu]\exp\left(i\int(\mathcal{L}_M - \frac{1}{2\xi}(F^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu)\right) \end{aligned} \tag{447}$$

を得る。かくして $F^\mu = \partial^\mu$ と置けば、ゲージ固定条件を含んだ新しい電磁場のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{M\xi} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \tag{448}$$

が得られる。このラグランジアンをゲージ固定されたラグランジアンといい、$\xi$ をゲージパラメータという。このラグランジアンのもと、作用は外場の項 $J^\mu A_\mu$ を入れて

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu \right) \\ &= \int d^4x \left( -\frac{1}{2} A_\mu (-\partial^2 \eta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu \right) \\ &= \int d^4x \left( -\frac{1}{2} A_\mu \left( -\partial^2 \eta^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu + J^\mu A_\mu \right) \end{aligned} \tag{449}$$

となる。この $A_\mu$ に関する二次形式 $(-\partial^2 \eta^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu)$ の"逆行列"（プロパゲータ）は

$$D_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{k^2 - i\varepsilon} \left( \eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \tag{450}$$

で与えられる。即ち

$$Z(J^\mu) = e^{\frac{i}{2} JDJ} \quad \left( = \langle 0 | T e^{i \int JA} | 0 \rangle \right) \tag{451}$$

であり、従って

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x_1)} \frac{\delta}{\delta J^\nu(x_2)} Z(J^\mu) \Big|_{J=0} = i \langle 0 | T A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) | 0 \rangle = D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) \tag{452}$$

が得られる。ここで $\xi$ の値は任意であった。$\xi = 0$ の時ランダウゲージと呼ばれ、$\xi = 1$ の時ファインマンゲージと呼ばれる。。簡単のため以下ではファインマンゲージを取ることにする。ここで上で演算子法で求めたプロパゲータ (420) と異なるプロパゲータが得られたが、(420) で散乱振幅を計算した結果は (450) のファインマンゲージで計算した結果と一致する。簡単に説明すると、$J^\mu$ は $U(1)$ ゲージ対称性のネータカレントになっている。従って $\partial_\mu J^\mu = 0$ と保存カレントである。さらに (420) のプロパゲータの分子は $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$、$\hat{p}_\mu = p_\mu / p^0$ を用いて

$$\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j = \eta_{\mu\nu} - \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu - (n_\mu \hat{p}_\nu + p_\mu n_\nu) \tag{453}$$

と表される。相互作用の項にはベクトルポテンシャル $A_\mu$ と保存カレント $J^\mu$ が縮約された形で与えられている。余分な項は $\hat{p}_\mu$ と保存カレント $J^\mu$ の縮約で現れることになるが、$\hat{p}_\mu$ がちょうど微分作用素のように働き、その余分な項は後に説明する（カレントの保存の場の量子論版である）Ward-高橋の関係式の QED 版により 0 となる。

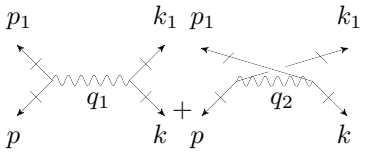
Wick's rule は実スカラー場の場合と同様なので省略する。

### 5.1.4 クーロンポテンシャル

この節では以前に湯川ポテンシャルを計算した時と同じようにボルン近似との比較によりフェルミオン通しの電磁相互作用を表すポテンシャルがクーロンポテンシャルとなることを説明する。フェルミオンと電磁場の相互作用の項は、フェルミオンのラグランジアンから生じる項 $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ で与えられる。湯川ポテンシャルの計算の場合と同様に振幅

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1 s_1, \mathbf{k}_1 r_1 | iT | \mathbf{k} r, \mathbf{p} s \rangle &= i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \mathcal{M}(p_f \leftarrow p_i) \\ &= \langle \mathbf{p}_1 s_1, \mathbf{k}_1 r_1 | (-ie) T \int d^4x A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | \mathbf{k} r, \mathbf{p} s \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{p}_1 s_1, \mathbf{k}_1 r_1 | \frac{1}{2!} (-ie)^2 T \int d^4x A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \int d^4y A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | \mathbf{k} r, \mathbf{p} s \rangle + \cdots \end{aligned} \tag{454}$$

を計算すればよい。摂動の最初の項はやはり 0 となり、従って第 2 項目が効いてくる。Feynman-diagram で電磁場を波線で表すと $i(2\pi)^4\delta^{(4)}\mathcal{M}$ は




$$ie^2\Bigg(\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\mu u_s(p)\frac{\eta^{\mu\nu}}{q_1^2}\bar{u}_{r_1}(k_1)\gamma^\nu u_r(k) + \bar{u}_{r_1}(k_1)\gamma^\mu u_s(p)\frac{\eta^{\mu\nu}}{q_2^2}\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\nu u_r(k)\Bigg)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i) \tag{455}$$

と書ける。ここでも湯川ポテンシャルの場合と同様に 2 つのフェルミオンの相互作用の場合を考える。従って 2 つのフェルミオンを区別することにする。Feynman-diagram はやはり最初のものだけを考えればよい。また非相対論的な極限では

$$\begin{aligned} &p = (m_f, \mathbf{p}), \quad p_1 = (m_f, \mathbf{p}_1) \\ &k = (M_f, \mathbf{k}), \quad k_1 = (M_f, \mathbf{k}_1) \\ &q_1^2 = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}|^2 = |\mathbf{q}_1|^2 \end{aligned} \tag{456}$$

であり、スピノールは近似的に静止系でのものに等しいので (335) で与えられる。また

$$\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^0 u_s(p) = u^\dagger_{s_1}(p_1)u_s(p) \simeq 2m_f\delta_{s_1 s} \tag{457}$$

$$\bar{u}_{r_1}(k_1)\gamma^0 u_r(k) = u^\dagger_{r_1}(k_1)u_r(k) \simeq 2M_f\delta_{r_1 r} \tag{458}$$

で $i = 1, 2, 3$ 成分は $\simeq 0$ となる。以上により振幅は

$$i\mathcal{M} = -ie^2\frac{1}{|\mathbf{q}_1|^2}2m_f\delta_{s_1 s}2M_f\delta_{r_1 r} \tag{459}$$

となる。対応も湯川ポテンシャルの時と同様なので

$$V(\mathbf{q}_1) := \langle \mathbf{p}_1|V|\mathbf{p}\rangle = \frac{e^2}{\mathbf{q}_1^2} \tag{460}$$

となる。これをフーリエ変換すれば

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r} \tag{461}$$

となる。これはまさにクーロンポテンシャルである。ここで $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$ を微細構造定数という。

### 5.1.5 Ward-高橋の関係式

以前説明した Ward-高橋の関係式 (266) の QED 版を説明する。QED ではラグランジアンの外場の項は

$$\mathcal{L}_s = -eJ^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \tag{462}$$

となる。ここで電磁場の外場の項はフェルミオンとの相互作用から来る項である。従って (266) は

$$\int d^4x\Big(e\langle J^\mu(x)\partial_\mu\alpha(x)\rangle + ie\alpha(x)\bar{\eta}(x)\langle\psi(x)\rangle - ie\alpha(x)\langle\bar{\psi}(x)\rangle\eta(x)\Big) = 0 \tag{463}$$

となる（$\langle\cdots\rangle$ の意味はまだ外場を 0 と取ってないので、$\langle 0|T\cdots e^{i\int(\mathcal{L}_I+\mathcal{L}_s)}|0\rangle$ のようになる。これを省略してこのように書いた)。これをさらに外場 $\bar{\eta}(x_2)$、$\eta(x_3)$ で微分し、$\bar{\eta} = \eta = 0$ と置き、$\alpha$ で汎関数微分を行えば

$$\begin{aligned} &\langle 0|T\partial_\mu J^\mu(x)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)e^{i\int\mathcal{L}_I}|0\rangle \\ &= i\delta^{(4)}(x - x_2)\langle 0|T\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)e^{i\int\mathcal{L}_I}|0\rangle - i\delta^{(4)}(x - x_3)\langle 0|T\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)e^{i\int\mathcal{L}_I}|0\rangle \end{aligned} \tag{464}$$

が得られる。これが通常 QED の場合に Ward-高橋の関係式と呼ばれるものである。

### 5.1.6 QED の繰り込み

まずはスカラー場の時に考えた発散の次数を電磁場とフェルミオンがある場合に考えてみる。電磁場の内線の数を $I_\gamma$、外線の数を $N_\gamma$ と置き、フェルミオンのをそれぞれ $I_e$、$N_e$ と置く。また時空の次元を $n$ とする。ループの数を全部で $L$ と置く。発散の次数 $D$ は、ループの数が積分の数だったので

$$D = nL - 2I_\gamma - I_e \tag{465}$$

となる（フェルミオンは $\sim \frac{1}{p}$ なので 1 でカウントする)。次に電磁場が $l$ 本、フェルミオンが $m$ 本出た頂点の数を $V_{lm}$ と置けば、内線の数だけあった積分が頂点から生じるデルタ関数でなくなり、最後に 1 つのデルタ関数だけあまるので

$$L = I_\gamma + I_e - \sum_{l,m} V_{lm} + 1 \tag{466}$$

及び、内線の数を 2 回カウントし、外線の数を 1 回カウントすれば頂点の数に頂点から出る線の数をかけたものに等しいので

$$\sum_{l,m} lV_{lm} - N_\gamma = 2I_\gamma \tag{467}$$

$$\sum_{l,m} mV_{lm} - N_e = 2I_e \tag{468}$$

これから発散の次数は

$$D = n - \frac{n-2}{2}N_\gamma - \frac{n-1}{2}N_e + \sum_{l,m}\left(\frac{n-2}{2}l + \frac{n-1}{2}m - n\right)V_{lm} \tag{469}$$

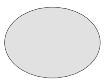
$n = 4$ と置けば

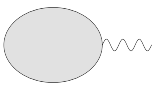
$$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e + \sum_{l,m}\left(l + \frac{3}{2}m - 4\right)V_{lm} \tag{470}$$

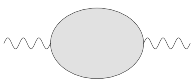
となる。従って $l + \frac{3}{2}m - 4 > 0$ である頂点が存在すれば繰り込み不可能になってしまう。容易に分かるように電磁場の次元はエネルギーの 1 乗の次元、フェルミオンはエネルギーの $\frac{3}{2}$ 乗の次元を持つ。ラグランジアンはエネルギーの 4 乗の次元でないといけないので結局 $l + \frac{3}{2}m - 4$ は結合定数の次元を表すことになる。即ち結合定数を $\lambda_{lm}$ とすれば $\deg \lambda_{lm} = 4 - l - \frac{3}{2}m$ である。$D$ を $\deg \lambda_{lm}$ を使って表せば

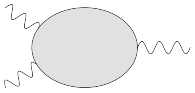
$$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e - \sum_{lm} \deg \lambda_{lm} V_{lm} \tag{471}$$

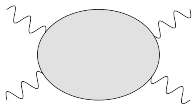
である。従って繰り込み可能であるには、全ての結合定数の次元がエネルギーの正の次元を持ってないといけないことが分かる。QED はこの条件を満たしている。$D \geq 0$ のグラフは、フェルミオンを実線で表し、電磁場を波線で表せば

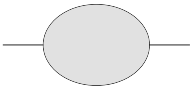
1)  $D = 0$,

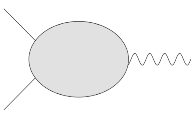
2)  $D = 3$,

3)  $D = 2$,

4)  $D = 1$,

5)  $D = 0$,

6)  $D = 1$,

7)  $D = 0$

である。これ以外のグラフは $D<0$ であるか、相互作用項を考慮すれば存在しないことが分かるグラフである。1) のグラフは真空エネルギーへの寄与であり、散乱振幅には影響を及ぼさないので無視出来る。2) のグラフに関しては、電磁場の外線がつながった頂点にはフェルミオンの内線が出ており、フェルミオンの内線だけでループを作るのが分かる。従って電磁場と添え字 $\mu$ の縮約をされるのは $p^\mu$（$p$ は外線の運動量）か $\gamma^\mu$ か $\eta^{\mu\nu}$ だが、$\gamma^\mu$ は存在せず、従って運動量 $p^\mu$ か $\eta^{\mu\nu}$ しかありえない。しかし添え字は奇数個あるはずなので少なくとも一つは $p^\mu$ である。従って $p^\mu\varepsilon^\lambda_\mu(p)=0$ より 0 となる。一般的に 4) などの奇数本電磁場の外線があるグラフも 0 となる。これらについては証明をしないで認めることにする。簡単にいうとこれはフェルミオンの荷電共役を取った時に $J^\mu$ が $-J^\mu$ に変わることに起因する。ここでは従って 4) も 0 となり、よって繰り込みが必要ないということだけ言っておく。詳しくはものの本を見られたい。同様に 5) も 0 になるが、これも説明しない。かくして繰り込みが必要なのは 3)、6)、7) のグラフのみである。以下ではこれらを繰り込むためにラグランジアンにカウンター項を導入して繰り込みを行っていく。

ここでは次元正則化により正則化をし、最小引き算により繰り込んでいくことにする。また Euclid 時空へ移したもので考える。ラグランジアンは裸のパラメータ、場を用いて

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_B^{\mu\nu}-\bar\psi_B(\frac{1}{i}\partial\!\!\!/+m_B)\psi_B-e_B\bar\psi_B\gamma^\mu\psi_BA_{B\mu} \tag{472}$$

ここで添え字の $_B$ は裸のパラメータ、場を表している。繰り込まれた場を $A_\mu$、$\psi$ などと表すと

$$\psi_B=Z_1^{\frac{1}{2}}\psi,\qquad Z_1=1+\delta_1 \tag{473}$$

$$A_{B\mu}=Z_2^{\frac{1}{2}}A_\mu,\qquad Z_2=1+\delta_2 \tag{474}$$

であり、パラメータ $e$、$m$ は

$$e_BZ_1Z_2^{\frac{1}{2}}=e\mu^{2-\frac{n}{2}}+\delta_e,\qquad m_BZ_1=m+\delta_m \tag{475}$$

である。スカラー場の時に説明した通り、次元を $n$ 次元にしたことによりパラメータ $e$ が次元を持つのでその調整としてエネルギースケール $\mu$ を導入する。繰り込まれた場、パラメータを用いてラグランジアンを書きなおすと

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2-\bar\psi(\frac{1}{i}\partial\!\!\!/+m)\psi-e\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu\\ &\quad -\frac{1}{4}\delta_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\bar\psi(\frac{1}{i}\delta_1\partial\!\!\!/+\delta_m)\psi-\delta_e\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu\end{aligned} \tag{476}$$

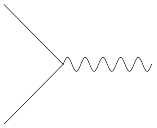
となる。ここでゲージ固定のための項 $-\frac{1}{2}(\partial A)^2$ を挿入したが、汎関数積分は繰り込まれた場の変数で行うため、繰り込まれた場で固定条件の項を挿入しなければいけない。以上により Feynman rule は



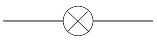
$$=\frac{-p\!\!\!/+m}{p^2+m^2} \tag{477}$$



$$=\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2} \tag{478}$$

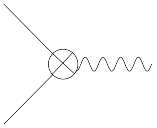


$$=-e\mu^{2-\frac{n}{2}}\gamma^\mu \tag{479}$$



$$=-(\delta_1p\!\!\!/+\delta_m) \tag{480}$$

$$=-(p^2\eta^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu)\delta_2 \tag{481}$$



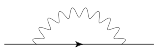
$$=-\delta_e\gamma^\mu \tag{482}$$

で与えられる。フェルミオンの自己相互作用項を $\Sigma(\not{p})$ で、電磁場のを $\Pi^{\mu\nu}(p)$ で書くことにする。繰り込まれる前のものを $_B$ の添え字を付けて表せば、

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma_B(\not{p}) - (\delta_1 \not{p} + \delta_m) \tag{483}$$

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \Pi^{\mu\nu}_B(p) - (p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\delta_2 \tag{484}$$

である。フェルミオンの自己相互作用から計算してみる。グラフは最初の order では



$$= \frac{-\not{p}+m}{p^2+m^2}\Sigma_B(\not{p})\frac{-\not{p}+m}{p^2+m^2} \tag{485}$$

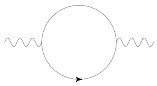
であり、

$$\begin{aligned}
\Sigma_B(\not{p}) &= e^2\mu^{4-n}\int \frac{d^n_E k}{(2\pi)^n}\gamma^\mu \frac{-\not{k}+m}{k^2+m^2}\gamma^\nu \frac{\eta_{\mu\nu}}{(k-p)^2} \\
&= \frac{e^2\mu^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(2-\frac{n}{2})\int_0^1 d\alpha \frac{\gamma^\mu(-\not{p}\alpha+m)\gamma_\mu}{[(1-\alpha)(p^2\alpha+m^2]^{2-\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{-e^2}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(2-\frac{n}{2})\int_0^1 d\alpha((n-2)\not{p}\alpha+nm)\left[\frac{(1-\alpha)(p^2\alpha+m^2)}{\mu^2}\right]^{\frac{n}{2}-2} \\
&= \frac{2e^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{n-4}(\not{p}+4m)+\text{finite}\right)
\end{aligned} \tag{486}$$

従って

$$\delta_1 = \frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{n-4}, \qquad \delta_m = \frac{e^2 m}{2\pi^2}\frac{1}{n-4} \tag{487}$$

次にフォトンの自己相互作用を計算してみる。グラフは



$$= \frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2}\Pi^{\nu\rho}_B(p)\frac{\eta_{\rho\sigma}}{p^2} \tag{488}$$

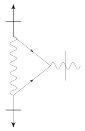
であり、

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}_B(p) &= -e^2\mu^{4-n}\int \frac{d^n_E k}{(2\pi)^n}\mathrm{tr}\gamma^\mu \frac{(-\not{k}+m)}{k^2+m^2}\gamma^\nu \frac{(-(\not{k}-\not{p})+m)}{(k-p)^2+m^2} \\
&= -e^2\mu^{4-n}n\int \frac{d^n_E k}{(2\pi)^n}\frac{k^\mu(k-p)^\nu + k^\nu(k-p)^\mu - (k(k-p)+m^2)\eta^{\mu\nu}}{(k^2+m^2)((k-p)^2+m^2)} \\
&= -\frac{e^2\mu^{4-n}n}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Bigg[\Gamma(1-\frac{n}{2})\int d\alpha[m^2+p^2(1-\alpha)\alpha]^{\frac{n}{2}-1}(1-\frac{n}{2})\eta^{\mu\nu}) \\
&\quad +\Gamma(2-\frac{n}{2})\int d\alpha[m^2+p^2(1-\alpha)\alpha]^{\frac{n}{2}-2}(2\alpha^2 p^\mu p^\nu - 2\alpha p^\mu p^\nu + \alpha(1-\alpha)p^2\eta^{\mu\nu} - m^2\eta^{\mu\nu})\Bigg] \\
&= -\frac{2e^2 n}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(2-\frac{n}{2})\int d\alpha[m^2+p^2(1-\alpha)\alpha]^{\frac{n}{2}-2}\alpha(1-\alpha)(p^2\eta^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu) \\
&= \frac{16e^2}{6(4\pi)^2}\left(\frac{1}{n-4}+\text{finite}\right)(p^2\eta^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu)
\end{aligned} \tag{489}$$

従って

$$\delta_2 = \frac{e^2}{6\pi^2}\frac{1}{n-4} \tag{490}$$

となる。最後に散乱振幅を計算する。摂動の最初の order では



$$
\begin{aligned}
&= -e^3(\mu^{2-\frac{n}{2}})^3 \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{\eta_{\rho\nu}}{(k-p_1)^2} \gamma^\rho \frac{-\not{k}+m}{k^2+m^2} \gamma^\mu \frac{-(\not{k}+\not{p}_2)+m}{(k+p_2)^2+m^2} \gamma^\nu \\
&= -e^3(\mu^{2-\frac{n}{2}})^3 \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{(n-2)\not{k}\gamma^\mu \not{k} + \cdots}{(k-p_1)^2(k^2+m^2)((k+p_2)^2+m^2)} \\
&= -\frac{e^3\mu^{2-\frac{n}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left[ \frac{(n-2)^2}{2} \gamma^\mu \Gamma(2-\frac{n}{2}) \int d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \left(\frac{M}{\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}-2} \delta(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1) + \text{finite} \right] \\
&= \frac{2e^3\mu^{2-\frac{n}{2}}}{(4\pi)^2} \gamma^\mu \left( \frac{1}{n-4} + \text{finite} \right)
\end{aligned} \tag{491}
$$

ここで

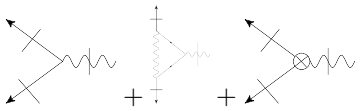
$$
M = [p_1^2\alpha_1(1-\alpha_1) + p_2^2\alpha_2(1-\alpha_2) + 2\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2 + m^2(1-\alpha_1)] \tag{492}
$$

であり、最後の等式は

$$
\int d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1) = \frac{1}{2} \tag{493}
$$

に注意すれば分かる。従って散乱振幅を $\Gamma^\mu(p)$ をおけば

$\Gamma^\mu(p)$ =



$$
\begin{aligned}
&= -e\mu^{2-\frac{n}{2}} \gamma^\mu \left( 1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{n-4} + \text{finite} \right) - \delta_e \gamma^\mu
\end{aligned} \tag{494}
$$

従って

$$
\delta_e = \frac{e^3\mu^{2-\frac{n}{2}}}{8\pi^2} \frac{1}{n-4} \tag{495}
$$

となる。以上でカウンター項が全て求まった。まとめると

$$
Z_1 = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{n-4}, \quad Z_2 = 1 + \frac{e^2}{6\pi^2}\frac{1}{n-4} \tag{496}
$$

$$
e_B Z_1 Z_2^{\frac{1}{2}} = e\mu^{2-\frac{n}{2}} \left( 1 + \frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{n-4} \right), \qquad m_B Z_1 = m \left( 1 + \frac{e^2}{2\pi^2}\frac{1}{n-4} \right) \tag{497}
$$

であり、$e_B$、$m_B$ は

$$
e_B = e\mu^{2-\frac{n}{2}} \left( 1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\frac{1}{n-4} \right), \qquad m_B = m \left( 1 + \frac{3e^2}{8\pi^2}\frac{1}{n-4} \right) \tag{498}
$$

となる。後は $e_B$、$m_B$ がそれぞれエネルギースケール $\mu$ に依存しないという条件より繰り込み群方程式

$$
\mu\frac{de}{d\mu} = \frac{n-4}{2}e + \frac{e^3}{12\pi^2}, \qquad \mu\frac{dm}{d\mu} = -\frac{3e^2}{8\pi^2}m \tag{499}
$$

が得られる。この order での結合定数 $e$ を、繰り込み群方程式から求めると、エネルギースケール $\mu_0$ での結合定数を $e_0$ と置けば、

$$
e^2 = \frac{e_0^2}{1 - \frac{e_0^2}{6\pi^2}\ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)} \tag{500}
$$

となる。微分方程式からも分かるが、$e$ はエネルギーが上がればその値が増えていく。上の $e^2$ は pole を持ってしまうが、これは摂動論を使ったために生じた pole である。実際には高エネルギーの領域では $e$ が小さい値とみなせないため摂動論が適用出来ない。

## 5.2 非可換ゲージ理論

### 5.2.1 ゲージ場

次に非可換ゲージ理論を説明する。非可換ゲージ理論は別名 Yang-Mills 理論とも呼ばれる。端的にいえば、非可換ゲージ理論とは場の理論にベクトル束の構造を取り入れたものといえる[12]。ここでは構造群 $SU(N)$ のベクトル束の場合を考える。ファイバーはフェルミオンの場である。従ってフェルミオン $\psi$ はスピノールの足（添え字）以外にファイバーの足（添え字）も持つことになる。$SU(N)$ の元は

$$U(x) = \exp\left( ig\alpha^a(x) T^a \right) \tag{501}$$

と書ける。ここで $T^a$ は $SU(N)$ の生成子からなる集合（Lie 代数といい、これはベクトル空間をなす）$\mathfrak{su}(N)$ の直交基である。即ち

$$\mathrm{tr} T^a T^b = \delta^{ab} \tag{502}$$

である。Lie 代数の交換関係を

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \tag{503}$$

と書くことにする（詳しくは付録"$SU(N)$"参照）。$T^a$ を $f^{abc}$ が完全反対称であるように選ぶと便利である。フェルミオンのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_f = -\bar{\psi}(\frac{1}{i}\not{\nabla} + m)\psi, \qquad \not{\nabla} = \gamma^\mu(\partial_\mu + igT^a A^a_\mu) \tag{504}$$

で与えられる。ここで $\psi$ は $\psi_{\alpha i}$ とスピノールの足 $\alpha$ とファイバーの足 $i$ を持っている。$A^a_\mu$ はゲージ場であるが、生成子を区別する添え字 $a$ が付いてる。$-gJ^{a\mu}A^a_\mu$ $(J^{a\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu T^a \psi)$ はフェルミオンとゲージ場との相互作用項である。また $J^{a\mu}$ はフェルミオンのラグランジアンのゲージ変換のネータカレントとなる。接続形式を $\omega$ と置けば

$$\omega := igT^a A^a_\mu dx^\mu = igA, \qquad A := T^a A^a_\mu dx^\mu =: T^a A^a =: A_\mu dx^\mu \tag{505}$$

と書ける。接続は $\nabla = d + \omega$ である。従って曲率は

$$\begin{aligned}
\Omega &= d\omega + \omega \wedge \omega \\
&= ig\left( dA + igA \wedge A \right) \\
&= ig \sum_{\mu<\nu} \left( \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= ig \sum_{\mu<\nu} \left( T^a(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) - g f^{abc} T^c A^a_\mu A^b_\nu \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= igT^a \sum_{\mu<\nu} \underbrace{\left( \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \right)}_{=: F^a_{\mu\nu}} dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= igT^a F^a = igF
\end{aligned} \tag{506}$$

[12]歴史的にはそうではなく、数学方面と物理方面とも独立に発見されている。それで数学の方ではゲージ理論という名前で呼ばれていて、物理のほうでは発見者の名前にちなんで Yang-Mills 理論と呼ばれている。

となる。ここで $F^a_{\mu\nu}$ ($F^a$) は場の強さ（Field strength）と呼ばれる。ゲージ場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{507}$$

$$*\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}F\wedge *F, \qquad S_G = \int_M *\mathcal{L}_G \tag{508}$$

で与えられる。フェルミオンとゲージ場のラグランジアンの和を展開すれば

$$\mathcal{L}_f + \mathcal{L}_G = \mathcal{L}_0 - gA^a_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi + gf^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu)A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu}A^{e\nu} \tag{509}$$

ここで $\mathcal{L}_0$ は相互作用項のないフェルミオンとゲージ場の自由ラグランジアンである。右辺第 2 項はフェルミオンとゲージ場の相互作用を表し、第 3、第 4 項はゲージ場自身の自己相互作用を表している。

ゲージ場のゲージ変換を見てみる。”ゲージ理論”note によれば (501) によるゲージ変換のもと、

$$\psi \to U\psi, \quad \omega \to U\omega U^{-1} + UdU^{-1} \tag{510}$$

と変換する。接続を具体的に $\alpha$ の 1 次の次数まで計算すれば

$$\begin{aligned}
\omega^\alpha &= U\omega U^{-1} + UdU^{-1} \\
&= ig(UAU^{-1} - d\alpha^a T^a) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= ig(A^aT^a - d\alpha^a T^a - igA^a[T^a, T^b]\alpha^b) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= ig(A^a - d\alpha^a + gf^{abc}A^b\alpha^c)T^a + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= ig(A^a_\mu - \partial_\mu\alpha^a + gf^{abc}A^b_\mu\alpha^c)T^a dx^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2)
\end{aligned} \tag{511}$$

となり、よってゲージ場は

$$A^a_\mu \to A^a_\mu - \partial_\mu\alpha^a + gf^{abc}A^b_\mu\alpha^c + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{512}$$

と変換する。

次に量子化の説明に進むが、非可換ゲージ理論の演算子法による量子化は QED の場合とちょっと事情が異なる。QED の場合と同じように添え字 $a$ に対する自由度を増やして生成消滅演算子を $a^a_\lambda(p)$ のようにし、交換関係に $\delta^{ab}$ が付けて定式化する。要するに添え字 $a$ で区別される電磁場のコピーが $N$ 個あると考える。そして電磁場と異なるのは相互作用項に (509) で与えられるゲージ場の相互作用項が存在するために摂動論のレベルで違いが生じるということでよさそうである。しかし非可換ゲージ理論で同じように量子化すると S matrix のユニタリティが保たれないことが知られている。この困難を回避するには後に見るゴースト場を導入しなければいけない。このことについては後述する。従って次節ではまず、すんなりとゴースト場を導入出来て、量子化を自然に出来る汎関数積分による量子化から説明することにする。

### 5.2.2 汎関数積分による量子化

電磁場の場合と同様に汎関数積分を用いて量子化する場合にはゲージ固定条件を反映させたデルタ関数を汎関数積分に挿入する必要がある。汎関数積分は

$$\begin{aligned}
Z(J^{a\mu}) &= \int [dA^{\alpha a}_\mu]\delta(F^\mu A^{\alpha a}_\mu - B^a)\det\left(\frac{\delta(F^\mu A^{\alpha a}_\mu)}{\delta\alpha^b}\right)e^{i\int\mathcal{L}_G(A^\alpha)} \\
&= \int [dA^a_\mu]\delta(F^\mu A^a_\mu - B^a)\det\left(\frac{\delta(F^\mu A^a_\mu)}{\delta\alpha^b}\right)e^{i\int\mathcal{L}_G(A)}
\end{aligned} \tag{513}$$

までは QED の場合と同じである。ここで行列式の部分は注意して計算する必要がある。積分変数が $A_\mu^{\alpha a}$ の時はそこからさらに $\alpha$ が変化する時の変換行列であるので、積分変数を $A_\mu^a$ に変えた後は $A_\mu^a$ から変化する時の変換行列となる。従って

$$\frac{\delta(F^\mu A_\mu^a)}{\delta\alpha^b} = \frac{\delta(F^\mu A_\mu^{\alpha a})}{\delta\alpha^b}\bigg|_{\alpha=0} = -F^\mu(\partial_\mu\delta^{ab} - gf^{acb}A_\mu^c) =: -F^\mu D_\mu^{ab} \tag{514}$$

となる。ここで QED の場合と違い、ゲージ場 $A^a$ があるので今度はこの行列式は無視できない。ここで一般に 2 つのグラスマン数値関数 $c^a(x), \bar{c}^a(x) \in G_1$（$G_1$ の定義は"経路積分" note 参照のこと）に対して

$$\int [d\bar{c}^a][dc^a] e^{-\int \bar{c}^a M^{ab} c^b} = \det M \tag{515}$$

（ここで"経路積分"note によれば、正確には $\frac{1}{i}$ の無限個の積の factor がつくはずであるが、それはここでの計算に影響を与えないので無視している）を用いて (514) の行列式を汎関数積分の形で書き表すと摂動論の計算で非常に便利である。即ち

$$Z(J^{a\mu}) \quad = \quad \int [dA_\mu^a][d\bar{c}^a][dc^a]\delta(F^\mu A_\mu^a - B^a) e^{i\int(\mathcal{L}_G + i\bar{c}^a F^\mu D_\mu^{ab} c^b)} \tag{516}$$

後は QED の時と同じで

$$\int [dB^a] e^{-\frac{i}{2\xi}\int B^2} = 1 \tag{517}$$

を挿入して $B$ 積分を行えば、（外場との相互作用項を入れて）

$$Z(J^{a\mu}) = \int [dA_\mu^a][d\bar{c}^a][dc^a] \exp\left( i\int (\mathcal{L}_G - \frac{1}{2\xi}(F^\mu A_\mu^a)^2 + i\bar{c}^a F^\mu D_\mu^{ab} c^b + J^{a\mu} A_\mu^a) \right) \tag{518}$$

となる。この指数に現れた見掛け上の新しい場 $c^a$ をゴースト場、$\bar{c}^a$ を反ゴースト場という。特に混乱の恐れのない場合にはどちらもまとめてゴースト場と呼ぶ。見たとおりにゴースト場はローレンツ変換のもとスカラー場と同じように変換するのでスピン 0 であり、グラスマン数値なのでフェルミオンのように反可換する非物理的な場である。この新しいラグランジアンをファデーフ・ポポフ（Faddeev-Popov）ラグランジアンという。

かくして $F^\mu = \partial^\mu$ と置けば（即ちローレンツゲージ）、ゲージ固定条件を含んだ新しいゲージ場のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{G\xi} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \tag{519}$$

が得られた。これは添え字 $a$ についての和がある以外は QED の場合と同じである。QED と違うのはゴースト場の項であり、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gh} &= i\bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b \\ &= i\bar{c}^a \partial^\mu (\partial_\mu \delta^{ab} - g f^{acb} A_\mu^c) c^b \end{aligned} \tag{520}$$

の項がある。これにはゲージ場とゴースト場との相互作用項が存在する。このラグランジアンの自己エルミート性よりゴースト場は実グラスマン数でないといけないことが分かる。

最後に後の計算のために、ここまでで得られたプロパゲータ、相互作用の Feynman rule を書いておく。プロパゲータは



$$= \frac{-\not{p} + m}{p^2 + m^2} \tag{521}$$

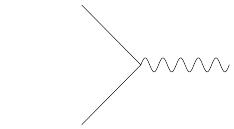


$$= \frac{\eta_{\mu\nu}\delta^{ab}}{p^2} \tag{522}$$

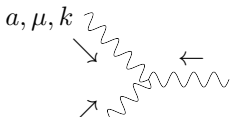


$$= \frac{i\delta^{ab}}{p^2} \tag{523}$$

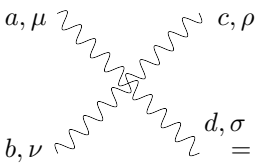
である。相互作用のダイアグラムは



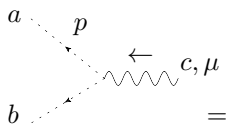
$$= \quad -igT^a\gamma^\mu \tag{524}$$




$$= \quad gf^{abc}\Big(\eta^{\mu\nu}(k-p)^\rho + \eta^{\nu\rho}(p-q)^\mu + \eta^{\rho\mu}(q-k)^\nu\Big) \tag{525}$$




$$\begin{aligned} = \quad -ig^2\Big( & f^{abe}f^{cde}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \\ & + f^{ace}f^{bde}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \\ & + f^{ade}f^{bce}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma})\Big) \end{aligned} \tag{526}$$




$$= \quad igf^{acb}p_\mu \tag{527}$$

である。ここで微分（従って運動量）を含むダイアグラムは in か out で符号が反対になることに注意。

### 5.2.3 BRST 対称性

以上で非可換ゲージ理論の汎関数による量子化が得られた。ここで前節で得られたゴースト場とゲージ固定項を含んだラグランジアンの代わりに次のラグランジアンを見てみる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \bar{\psi}(\frac{1}{i}\not{\nabla} + m)\psi + \frac{\xi}{2}(B^a)^2 + B^a\partial^\mu A^a_\mu + i\bar{c}^a\partial^\mu D^{ab}_\mu c^b \tag{528}$$

ここで新しく $B^a$ なる場があるが、ラグランジアンにはこれの微分項が存在しない。このラグランジアンで汎関数積分を定義し、$B^a$ について平方完成し、$B^a$ で積分すれば前節で求めたもとのラグランジアンンが得られることが分かる。このような $B^a$ を補助場という。即ちこのラグランジアンは前節で求めたラグランジアンと（フェルミオンの項を除いて）等価である。このラグランジアンには奇妙な対称性がある。$\varepsilon$ をグラスマン数とし（従って $\varepsilon^2 = 0$）、

$$\begin{aligned} \delta A^a_\mu &= -\varepsilon D^{ab}_\mu c^b \\ \delta\psi &= ig\varepsilon c^a T^a \psi \\ \delta c^a &= -\frac{1}{2}g\varepsilon f^{abc}c^b c^c \\ \delta\bar{c}^a &= \frac{1}{i}\varepsilon B^a \\ \delta B^a &= 0 \end{aligned} \tag{529}$$

なる変換のもとラグランジアンは不変である。まず第一式と第二式は $U = \exp(ig\varepsilon c^a T^a)$（$c^a$ はゴースト場）によるゲージ変換を意味しており、従って (528) の第一項と第二項は不変である。第三項の不変性は自明。第四項と第

五項の $\bar{c}^a$ の変換したものがキャンセルする。第五項の残りが変換したものは

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu^{ab}c^b) &= -gf^{acb}\delta A_\mu^c c^b + D_\mu^{ab}\delta c^b \\
&= g\varepsilon f^{acb}\partial_\mu c^c c^b - g^2\varepsilon f^{acb}f^{ced}A_\mu^e c^d c^b - \frac{1}{2}g\varepsilon f^{abc}\partial_\mu(c^b c^c) + \frac{1}{2}g^2\varepsilon f^{acb}f^{bde}A_\mu^c c^d c^e \\
&= \frac{1}{2}g^2\varepsilon(-2f^{abe}f^{bcd} + f^{acb}f^{bde})A_\mu^c c^d c^e \\
&= \frac{1}{2}g^2\varepsilon(f^{cdb}f^{eba} + f^{ecb}f^{dba} + f^{deb}f^{cba})A_\mu^c c^d c^e \\
&= 0
\end{aligned} \tag{530}$$

となる。最後から 3 段目の等式へは添え字の適当な置き換えを行えばよい。また最後から 2 段目の等式は構造因子の添え字の入れ替えに対する反対称性と、ゴースト場の反可換性に注意すれば分かる。最後の等式はヤコビ恒等式による。以上により変換 (529) によりラグランジアンが不変であることが示された。変換 (529) は BRST 変換と呼ばれ、この対称性を BRST 対称性と呼ぶ。この対称性のネータカレントは容易に求められる。すなわちネータカレント $\mathcal{J}_B^\mu$ とグラスマン数 $\varepsilon$ との積 $\mathcal{J}_B^\mu\varepsilon$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_B^\mu\varepsilon &= F^{a\mu\nu}\delta A_\nu^a + \bar{\psi}\frac{1}{i}\gamma^\mu\delta\psi - B^a\delta A^{a\mu} - iD^{ab\mu}c^b\cdot\delta\bar{c}^a + i\partial^\mu\bar{c}^a\cdot\delta c^a \\
&= F^{a\mu\nu}D_\nu^{ab}c^b\varepsilon + g\bar{\psi}\gamma^\mu c^a T^a\psi\varepsilon - B^a D^{ab\mu}c^b\varepsilon - (D^{ab\mu}c^b)B^a\varepsilon - \frac{i}{2}g\partial^\mu\bar{c}^a\cdot f^{abc}c^b c^c\varepsilon \\
&= F^{a\mu\nu}D_\nu^{ab}c^b\varepsilon + g\bar{\psi}\gamma^\mu c^a T^a\psi\varepsilon - 2B^a D^{ab\mu}c^b\varepsilon - \frac{i}{2}g\partial^\mu\bar{c}^a\cdot f^{abc}c^b c^c\varepsilon
\end{aligned} \tag{531}$$

で与えられる。最後の等式はヤコビ恒等式を用いてまとめればよい。このネータカレントはこれまでのそれと違い、摂動論的な定義ではないことに注意。ここでは摂動論的ではなく一般的に以下の事項が成立することをいうために相互作用項まで含めて計算した。従って BRST 変換の生成子は

$$Q_B := \int d^3\mathbf{x}\mathcal{J}_B^0 \tag{532}$$

で与えられる。これは自己エルミート $Q_B^\dagger = Q_B$ であることに注意。ここで現れる場を一般に $\phi$ と書くと、BRST 変換は $\delta\phi = \varepsilon\delta_B\phi = i[\varepsilon Q_B, \phi]$ と書くことが出来る。$\delta_B$ を BRST 演算子と呼ぶ。$Q_B$ はこの BRST 変換の生成子であり、グラスマンン数 $\varepsilon$ とセットになって場との交換関係が無限小変換を定義する。この時 $\delta_B^2\phi = 0$ が示せる。即ち BRST 変換を 2 回行うと場は元に戻る。$A_\mu^a$ に関しては上の計算より明らか。また $\bar{c}^a$ も自明。$c^a$ に関してはヤコビ恒等式より。$\psi$ に関しては $T^aT^bc^ac^b = \frac{1}{2}[T^a, T^b]c^ac^b = \frac{i}{2}f^{abc}T^c c^a c^b$ を用いれば分かる。全ての場に対して $\delta_B^2\phi = 0$ であるので BRST 演算子は恒等式 $\delta_B^2 = 0$ を満たすことになる。ここで $\varepsilon\delta_B\phi = i[\varepsilon Q_B, \phi]$ より

$$\begin{aligned}
\delta_B\phi &= i[Q_B, \phi]_f := \begin{cases} i[Q_B, \phi] & : \phi\text{がボソン場の場合} \\ i\{Q_B, \phi\} & : \phi\text{がフェルミオンの場合} \end{cases} \\
&= i(Q_B\phi - (-1)^{\deg\phi}\phi Q_B)
\end{aligned} \tag{533}$$

が得られるので

$$\begin{aligned}
\delta_B^2\phi &= i^2[Q_B, [Q_B, \phi]_f]_f \\
&= i^2\Big((Q_BQ_B\phi - (-1)^{\deg\phi}Q_B\phi Q_B) - (-1)^{\deg\phi+1}(Q_B\phi Q_B - (-1)^{\deg\phi}\phi Q_BQ_B)\Big) \\
&= i^2[Q_b^2, \phi] = 0
\end{aligned} \tag{534}$$

となる。$Q_B$ を構成する各項が全てグラスマン数が奇数個であるために $Q_B^2 = 0$ が容易に示せる。従ってここでも $\delta_B^2 = 0$ が示される。ラグランジアンの BRST 対称性より、ハミルトニアンもまた BRST 対称性を持つ。即ち

$[H, Q_B] = 0$ である。ラグランジアンが BRST 不変なので物理的な状態ベクトル $|phys\rangle$ は全て BRST 変換のもと不変でないといけない。即ち $Q_B$ により生成されるフロー $U = \exp(-i\varepsilon Q_B)$ の作用のもと不変 $U|phys\rangle = |phys\rangle$ でないといけない。従って

$$Q_B|phys\rangle = 0 \tag{535}$$

を満たすのが分かる。また任意のベクトル $|\varphi\rangle$ に対して $|\acute{\varphi}\rangle = Q_B|\varphi\rangle$ のノルムは $Q_B$ の自己エルミート性により

$$\langle\acute{\varphi}|\acute{\varphi}\rangle = \langle\varphi|Q_B^2|\varphi\rangle = 0 \tag{536}$$

即ち $Q_B|\varphi\rangle$ はノムルが 0 のベクトルとなる。状態ベクトルに $Q_B$ を作用させたベクトルは BRST 変換の定義から分かるようにゴースト数が増えている。ただし反ゴースト場に関しては減っている。即ち $c^a$ はゴースト数を 1 で、$\bar{c}^a$ はゴースト数を $-1$ でカウントすれば、$Q_B$ の作用は状態ベクトルにゴースト数を 1 増やす演算子であるといえる。よって物理的な状態にはゴースト場が存在しないので物理的状態は $Q_B|\varphi\rangle$ の形では書けないベクトルでないといけない。以上により $|Phys\rangle = |phys\rangle + Q_B|\varphi\rangle$ のノルムは

$$\langle Phys|Phys\rangle = \langle phys|phys\rangle \tag{537}$$

であり、S matrix の行列要素も $Q_B$ とハミルトニアン $H$ とが交換することより $\langle Phys1|S|Phys2\rangle = \langle phys1|S|phys2\rangle$ となることが分かる。以上をまとめると物理的状態は $Q_B$ で消滅するベクトルであり、$Q_B|\varphi\rangle$ の形ではかけない必要がある。さらに $Q_B|\varphi\rangle$ だけ異なる状態ベクトルは物理的に等価な状態ベクトルを表しているといえる。

以上のことを数学的な表現で述べるならば、状態ベクトルからなるヒルベルト空間 $H$ に対してチェイン複体

$$\cdots \overset{Q_B}{\to} H \overset{Q_B}{\to} H \overset{Q_B}{\to} \cdots \tag{538}$$

を定義出来て、物理的状態ベクトル全体からなる集合、物理的ヒルベルト空間 $H_{ph}$ はこのチェイン複体のコホモロジー群

$$H_{ph} := \mathrm{Ker}Q_B/\mathrm{Im}Q_B \tag{539}$$

により定義出来る（チェイン複体やコホモロジー群などについては”トポロジー”note 参照）。

以上の BRST 対称性は補助場を用いて説明したが、補助場を用いないでも記述することが出来る。補助場を入れない場合のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \bar{\psi}(\frac{1}{i}\nabla\!\!\!/ + m)\psi - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 + i\bar{c}^a\partial^\mu D^{ab}_\mu c^b \tag{540}$$

であるが、BRST 変換を

$$\begin{aligned}
\delta A^a_\mu &= -\varepsilon D^{ab}_\mu c^b \\
\delta\psi &= ig\varepsilon c^a T^a \psi \\
\delta c^a &= -\frac{1}{2}g\varepsilon f^{abc}c^b c^c \\
\delta\bar{c}^a &= \frac{i}{\xi}\varepsilon\partial^\mu A^a_\mu
\end{aligned} \tag{541}$$

で定義すればよい。これは上のラグランジアン (528) から補助場 $B^a$ を積分して排除することが、補助場を $B^a = -\frac{1}{\xi}\partial^\mu A^a_\mu$（これは補助場 $B^a$ の運動方程式である）で置き換えることになることに対応している。この場合にもグラスマン数 $\varepsilon$ を除いたものを $\delta_B$ として定義出来るが、これも $\delta_B^2 = 0$ が示される。最初のものと異なるのは $\bar{c}^a$ の変分に関するものであるが、$\delta_B^2 c^a$ はゴースト場のオイラー・ラグランジュ方程式により 0 となる。この場合の BRST 変換のネータカレントも同様に $B^a$ を消去したものになる。

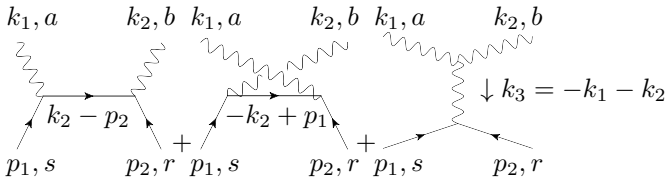
以上では非摂動論的な BRST 対称性について説明した。しかしほんの少しの修正をすれば、これまでの運動量や運動エネルギー（演算子）と同じように摂動論的な（即ち相互作用項を除いた自由ラグランジアンから得られる共役運動量 $\pi_\alpha$ と変分 $\delta\phi_\alpha$ との積の和 $\sum_\alpha \pi_\alpha \delta\phi_\alpha$ として得られる BRST 対称性変換の）ネータカレントを得ることもできる。通常は摂動論的に量子化を行い計算するので、摂動論的な場合のネータカレントも求めておこう。計算すると

$$\mathcal{J}_B^\mu \varepsilon = (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) D_\nu^{ab} c^b \varepsilon + g\bar{\psi}\gamma^\mu c^a T^a \psi \varepsilon + \frac{1}{\xi}\partial^\nu A_\nu^a \cdot \partial^\mu c^a \varepsilon - \frac{i}{2} g \partial^\mu \bar{c}^a \cdot f^{abc} c^b c^c \varepsilon \tag{542}$$

となる。

### 5.2.4 カレントの保存について

非可換ゲージ理論においても QED と同様、Ward-高橋の関係式が成立する。ここでは具体的に振幅を計算することで見てみる。まず以下の 3 つのダイアグラムを計算する。



(543)

即ち 2 つのフェルミオンが 2 つのゲージボソンへ変換する振幅である。最初の 2 つのダイアグラムに対応する振幅は

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i)\mathcal{M}_1 &= \langle \mathbf{k}_1\lambda b, \mathbf{k}_2\kappa a | \frac{1}{2!}(-ig)^2 T \int d^4x A_\mu^a \bar{\psi}\gamma^\mu T^a \psi \int d^4x A_\nu^b \bar{\psi}\gamma^\nu T^b \psi | \mathbf{p}_1 s, \bar{\mathbf{p}}_2 r\rangle \\ &= ig^2 \Bigg( (\varepsilon^*)_\nu^\lambda(k_1)(\varepsilon^*)_\mu^\kappa(k_2)\bar{v}_r(p_2)\gamma^\mu T^a \frac{1}{\not{k}_2 - \not{p}_2 + m}\gamma^\nu T^b u_s(p_1) \\ &\quad + (\varepsilon^*)_\nu^\lambda(k_1)(\varepsilon^*)_\mu^\kappa(k_2)\bar{v}_r(p_2)\gamma^\nu T^b \frac{1}{-\not{k}_2 + \not{p}_1 + m}\gamma^\mu T^a u_s(p_1) \Bigg)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i) \end{aligned} \tag{544}$$

である。この振幅からゲージ場の外線を取り除いたものを $i\mathcal{M}_1^{\mu\nu}$ と書くことにする。ここで $(\varepsilon^*)_\mu^\kappa(k_2)$ を $k_{2\mu}$ に置き換えてみる。$\gamma^\mu$ と縮約されて $\not{k}_2$ になるが、ディラック方程式 $(\not{p}_1 + m)u_s(p_1) = 0$、$\bar{v}_s(p_2)(-\not{p}_2 + m) = 0$ より、これらを適切に符号をつけて足すととフェルミオンの内線の分母と相殺し

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_1^{\mu\nu} k_{2\mu}(\varepsilon^*)_\nu^\lambda &= ig^2(\varepsilon^*)_\nu^\lambda(k_1)\bar{v}_r(p_2)\gamma^\nu([T^a, T^b])u_s(p_1) \\ &= -g^2(\varepsilon^*)_\nu^\lambda(k_1)\bar{v}_r(p_2)\gamma^\nu f^{abc}T^c u_s(p_1) \end{aligned} \tag{545}$$

となる。これは QED の場合には構造因子がないので 0 となる。上のダイアグラムの 3 つ目は QED にはないので、これはちょうどカレントの保存を意味している。

3 つ目のダイアグラムを計算すると

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i)\mathcal{M}_2 &= \langle \mathbf{k}_1\lambda b, \mathbf{k}_2\kappa a | g^2 T \int d^4x A_\mu^d \bar{\psi}\gamma^\mu T^d \psi \int d^4x f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} | \mathbf{p}_1 s, \bar{\mathbf{p}}_2 r\rangle \\ &= g^2 \bar{v}_r(p_2)\gamma_\rho T^c u_s(p_1)(\varepsilon^*)_\nu^\lambda(k_1)(\varepsilon^*)_\mu^\kappa(k_2)\frac{1}{k_3^2} \\ &\quad \times f^{abc}\Big( \eta^{\nu\mu}(k_2 - k_1)^\rho + \eta^{\mu\rho}(k_3 - k_2)^\nu + \eta^{\rho\nu}(k_1 - k_3)^\mu \Big)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i) \end{aligned} \tag{546}$$

ここで上と同様に振幅からゲージ場の外線を取り除いたものを $i\mathcal{M}_2^{\mu\nu}$ と書き、$(\varepsilon^*)_\mu^\kappa(k_2)$ を $k_{2\mu}$ で置き換えると

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_2^{\mu\nu} k_{2\mu}(\varepsilon^*)_\nu^\lambda &= g^2(\varepsilon^*)_\nu^\lambda(k_1)\bar{v}_r(p_2)\gamma_\rho T^c u_s(p_1)\frac{1}{k_3^2} f^{abc}\Big( k_2^\nu(k_2 - k_1)^\rho + k_2^\rho(k_3 - k_2)^\nu + \eta^{\rho\nu}(k_1 - k_3)k_2 \Big) \\ &= g^2(\varepsilon^*)_\nu^\lambda(k_1)\bar{v}_r(p_2)\gamma_\rho T^c u_s(p_1)\frac{1}{k_3^2} f^{abc}\Big( k_1^\rho k_1^\nu - k_3^\rho k_3^\nu + \eta^{\rho\nu}(k_3^2 - k_1^2) \Big) \end{aligned} \tag{547}$$

となる。2 段目カッコ内の最初の項は $k_1^\nu(\varepsilon^*)_\nu^\lambda(k_1)=0$ より消える。第二項目は $k_3=-p_1-p_2$、及び

$$\bar{v}_r(p_2)\not{k}_3 u_s(p_1)=\bar{v}_r(p_2)\Big((-\not{p}_2+m)-(\not{p}_1+m)\Big)u_s(p_1)=0 \tag{548}$$

より消える。第四項目は $k_1^2=0$ から、残り $k_3^2$ はゲージ場のプロパゲータから来る $\frac{1}{k_3^2}$ と相殺し、最終的には全体では (545) の逆符号のものが得られるので、結局上の 3 つのダイアグラムに対応する振幅を足し合わせたものは全体で 0 となる。これが非可換ゲージ理論での Ward-高橋の関係式の具体例である。ここでまず重要なのは、異なる頂点ダイアグラムの結合定数が同じ $g$ を用いて表されていることからこの相殺が成り立ったということである。このような相殺はゲージ場が 4 つの外線のダイアグラムに対してもいえることである。

上で計算したダイアグラムの相殺は BRST 変換による Ward-高橋の関係式で導ける。それには $\langle 0|T\bar{c}^a A_\nu^b\bar{\psi}\psi e^{i\int V^*}|0\rangle$ の BRST 変換を計算すればよい。

$$\frac{i}{\xi}\varepsilon\langle 0|T(\partial^\mu A_\mu^a)A_\nu^b\bar{\psi}\psi e^{i\int V^*}|0\rangle-\varepsilon\langle 0|T\bar{c}^a\partial_\nu c^b\bar{\psi}\psi e^{i\int V^*}|0\rangle=0 \tag{549}$$

ここで $\bar{\psi}\psi$ はゲージ不変性のため変分が現れない。これは Feynman ゲージ $\xi=1$ の時に運動量表示すれば

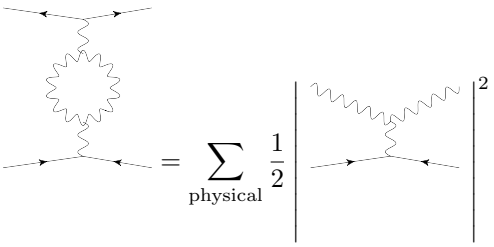
$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}k_{2\mu}=S^{ab}k_{2\nu} \tag{550}$$

で表される。ここに $i\mathcal{M}=i\mathcal{M}_1+i\mathcal{M}_2$ である。右辺に外線がゴースト場とゲージ場からなる振幅が出てきた。この項は次の節で説明するが、ゲージ場のプロパゲータに横波成分だけでなく非物理的な縦波成分まで含んでいることに起因している。次の節では非可換ゲージ理論の量子化にゴースト場が必要な理由を説明する。

### 5.2.5 ユニタリティ

前節で計算したダイアグラムは 2 つのフェルミオンから 2 つのゲージ場へ遷移する振幅であった。ここでその中の 3 つ目のダイアグラムに対して、「S matrix」の節で説明したように光学定理は $2\mathrm{Im}\langle i|T|i\rangle=\langle i|T^\dagger T|i\rangle$ であるので、

$$2\mathrm{Im}\quad=\sum_{\text{physical}}\frac{1}{2}\Bigg|\quad\Bigg|^2 \tag{551}$$



を意味している。ここで右辺の和は 1 の分割を挿入した際に現れるゲージ場の運動量の積分である。この光学定理は S matrix のユニタリティからの帰結であったことに注意されたい。従ってユニタリティが成立しているならば、光学定理も成立してなければいけない。しかし、左辺のゲージ場のループにはゲージ場のプロパゲータからくる $\eta_{\mu\nu}$ が出てくる。ここで計量 $\eta_{\mu\nu}$ は横偏極ベクトルと縦偏極ベクトルと用いて

$$\eta_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_\mu^0(\varepsilon^*)_\nu^3+\varepsilon_\mu^3(\varepsilon^*)_\nu^0\Big)+\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\mu^\lambda(\varepsilon^*)_\nu^\lambda \tag{552}$$

と書ける。一方右辺の終状態に対する和に関しては、ゲージ場の終状態には横偏極成分しかない。従って左辺には縦偏極の余分なものまで含まれてしまう。

では実際にその余分な項を計算してみる。$i\mathcal{M}_1^{\mu\nu}+i\mathcal{M}_2^{\mu\nu}=i\mathcal{M}^{\mu\nu}$ と置く。(551) の左辺の被積分関数は

$$\frac{1}{2}(i\mathcal{M}^{\rho\sigma})^\dagger\eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu}(i\mathcal{M}^{\mu\nu}) \tag{553}$$

である。ゲージ場のプロパゲータの分母はここでは省略して書くことにする。これと (552) を用いて得られる項の内、$(\varepsilon^*)^3_\nu(k) = k_\nu/k^0$ より $i\mathcal{M}^{\mu\nu}(\varepsilon^*)^\lambda_\mu(\varepsilon^*)^3_\nu$ $(\lambda = 1, 2)$ のつく項は前節で計算したものに等しいので 0 となる。従ってこの複素共役 $(i\mathcal{M}^{\mu\nu})^\dagger\varepsilon^\lambda_\mu\varepsilon^3_\nu$ もまた 0 となる。$i\mathcal{M}^{\mu\nu}(\varepsilon^*)^3_\mu(\varepsilon^*)^3_\nu$ もまた、前節と全く同様の計算が成り立つことに注意すれば 0 となることが分かる。その複素共役 $(i\mathcal{M}^{\mu\nu})^\dagger\varepsilon^3_\mu\varepsilon^3_\nu$ も 0 となる。(553) の 2 つの計量から両方とも (552) の右辺第三項を選んだものはまさに (551) の右辺に対応する。従って (551) の左辺の残りの項に被積分関数は

$$\frac{1}{2}\left(\left((i\mathcal{M}^{\rho\sigma})^\dagger\frac{1}{2}\varepsilon^0_\rho\varepsilon^3_\sigma\right)\left(\frac{1}{2}(\varepsilon^*)^3_\mu(\varepsilon^*)^0_\nu i\mathcal{M}^{\mu\nu}\right) + \left((i\mathcal{M}^{\rho\sigma})^\dagger\frac{1}{2}\varepsilon^3_\rho\varepsilon^0_\sigma\right)\left(\frac{1}{2}(\varepsilon^*)^0_\mu(\varepsilon^*)^3_\nu i\mathcal{M}^{\mu\nu})\right)\right) \tag{554}$$

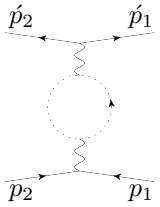
ここで $(\varepsilon^*)^0_\nu(k_1) = (k^0_1, \mathbf{k}_1)/k^0_1 = (1, \mathbf{k}_1/k^0_1)$ に注意して計算すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\varepsilon^*)^3_\mu(k_2)(\varepsilon^*)^0_\nu(k_1)i\mathcal{M}^{\mu\nu} &= \frac{g^2}{2}(\varepsilon^*)^0_\nu(k_1)\bar{v}_r(p_2)\gamma_\rho T^c u_s(p_1)\frac{1}{k^2_3}f^{abc}k^\rho_1 k^\nu_1\frac{1}{k^0_2}\\ &= g^2\bar{v}_r(p_2)\gamma_\rho T^c u_s(p_1)\frac{1}{k^2_3}f^{abc}k^\rho_1\frac{k^0_1}{k^0_2}\end{aligned} \tag{555}$$

従って (551) の終状態フェルミオンの運動量を $\acute{p}_1, \acute{p}_2$ と置くと

$$(554) = \frac{1}{2}\left(\left(g^2\bar{u}_s(\acute{p}_1)\gamma_\rho T^c v_r(\acute{p}_2)\frac{1}{k^2_3}f^{abc}(-k^\rho_2)\right)\left(g^2\bar{v}_r(p_2)\gamma_\rho T^c u_s(p_1)\frac{1}{k^2_3}f^{abc}k^\rho_1\right) + (k_1 \leftrightarrow k_2)\right) \tag{556}$$

となる。第二項目は $\bar{v}_r(p_2)(p_2 + p_1)u_s(p_1) = \bar{v}_r(p_2)(k_1 + k_2)u_s(p_1) = 0$ を用いれば第一項目と等しくなるのが分かる。この残った余分な項は見たとおりにゲージ場の非物理的な縦波成分からの寄与である。この余分な項は以下のゴースト場のループを含んだダイアグラムと相殺する。




$$\begin{aligned}&= -(i\mathcal{M}^{cd}_{gh})^\dagger(i\delta^{ca})(i\delta^{db})i\mathcal{M}^{ab}_{gh}\\ &= \left(-ig^2\bar{u}_s(\acute{p}_1)\gamma_\rho T^c v_r(\acute{p}_2)\frac{1}{k^2_3}f^{abc}(-k^\rho_2)\right)\left(-ig^2\bar{v}_r(p_2)\gamma_\rho T^c u_s(p_1)\frac{1}{k^2_3}f^{abc}k^\rho_1\right)\end{aligned} \tag{557}$$

ここでもゴースト場のプロパゲータの分母と運動量積分は省略している。1 段目の全体にマイナスが付いているのはゴースト場が反可換であるためであるのでループには全体にマイナスが付くためであり、ゴースト場のプロパゲータに虚数の factor $i$ が付いているためにそれと打ち消しあう。最終的に上で求めた振幅のちょうど反対符号となるのが分かる。従ってこのダイアグラムを考慮すれば上の非物理的な縦波成分からの寄与と相殺することが分かる。つまり、ゴースト場を考慮して初めてユニタリティが保たれるのである。

### 5.2.6 非可換ゲージ理論の繰り込み

繰り込みを行うにはこれまで通りに発散するダイアグラムを定める必要がある。発散の次数 $D$ は QED の場合とほぼ同様である。異なるのはゴースト場の存在である。ゲージ場の内線を $I_G$、外線の数を $N_G$ と置き、フェルミオンのをそれぞれ $I_f$、$N_f$ と置く。またゴースト場のをそれぞれ $I_{gh}$、$N_{gh}$ と置く。時空の次元を $n$ とする。ダイアグラムのループの数を $L$ と置けば発散の次数 $D$ は、

$$D = nL - 2I_G - I_f - 2I_{gh} \tag{558}$$

となる。さらに非可換ゲージ理論では相互作用項に微分演算子がついたものがあるので、そのような相互作用項がある場合には

$$D = nL - 2I_G - I_f - 2I_{gh} + r \tag{559}$$

と修正しなければいけない。ここで $r$ はそのような相互作用項を表す頂点の数である。QED の場合と同様にして、ゲージ場が $l$ 本、フェルミオンが $m$ 本、ゴースト場が $k$ 本出た頂点の数を $V_{lmk}$ と置けば、

$$L = I_G + I_f + I_{gh} - \sum_{l,m,k} V_{lmk} + 1 \tag{560}$$

であり、内線の数を 2 回カウントし、外線の数を 1 回カウントすれば頂点の数に頂点から出る線の数をかけたものに等しいので

$$\sum_{l,m,k} lV_{lmk} - N_G = 2I_G \tag{561}$$

$$\sum_{l,m,k} mV_{lmk} - N_f = 2I_f \tag{562}$$

$$\sum_{l,m,k} kV_{lmk} - N_{gh} = 2I_{gh} \tag{563}$$

となり、発散の次数は

$$D = n - \frac{n-2}{2}N_G - \frac{n-1}{2}N_f - \frac{n-2}{2}N_{gh} + \sum_{l,m,k}\left(\frac{n-2}{2}l + \frac{n-1}{2}m + \frac{n-2}{2}k - n\right)V_{lmk} + r \tag{564}$$

となる。$n = 4$ と置けば

$$D = 4 - N_G - \frac{3}{2}N_f - N_{gh} + \sum_{l,m,k}\left(l + \frac{3}{2}m + k - 4\right)V_{lmk} + r \tag{565}$$

が得られる。微分演算子がない頂点に関しては $4 - l - \frac{3}{2}m - k$ は結合定数の次元でる。また微分がある場合には $4 - l - \frac{3}{2}m - k - 1$ が結合定数の次元になる。よって結合定数を $\lambda_{lmk}$ と置けば

$$D = 4 - N_G - \frac{3}{2}N_f - N_{gh} - \sum_{l,m,k} \deg \lambda_{lmk} V_{lmk} \tag{566}$$

と書ける。ここでもやはり繰り込み可能であるためには結合定数の次元が正でないといけないのが分かる。従って非可換ゲージ理論も naive には繰り込み可能である。本当に繰り込みが可能であることの証明は省略する。

非可換ゲージ理論の繰り込みを計算するために、まずこれまで通りに次元正則化を行いカウンター項を導入し、計算していく。裸の場やパラメータに添え字の $_B$ を付けて表せば

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^a_{B\mu\nu}F_B^{a\mu\nu} - \bar{\psi}_B(\frac{1}{i}\partial\!\!\!/ + m_B)\psi_B + i\bar{c}^a_B\partial^2 c^a_B \\ &\quad -g_B A^a_{B\mu}\bar{\psi}_B\gamma^\mu T^a\psi_B + g_B f^{abc}(\partial_\mu A^a_{B\nu})A^{b\mu}_B A^{c\nu}_B - \frac{1}{4}g_B^2 f^{abc}f^{ade}A^b_{B\mu}A^c_{B\nu}A^{d\mu}_B A^{e\nu}_B \\ &\quad -ig_B f^{acb}\bar{c}^a_B\partial^\mu(A^c_{B\mu}c^b_B)\end{aligned} \tag{567}$$

であり、繰り込まれた場を添え字をつけないで表すと

$$\psi_B = Z_1^{\frac{1}{2}}\psi, \quad Z_1 = 1 + \delta_1 \tag{568}$$

$$A^a_{B\mu} = Z_2^{\frac{1}{2}}A^a_\mu, \quad Z_2 = 1 + \delta_2 \tag{569}$$

$$c^a_B = Z_3^{\frac{1}{2}}c^a, \quad Z_3 = 1 + \delta_3 \tag{570}$$

であり、パラメータ $g$、$m$ は

$$g_B Z_1 Z_2^{\frac{1}{2}} = g\mu^{2-\frac{n}{2}} + \delta_{g1}, \qquad m_B Z_1 = m + \delta_m \tag{571}$$

$$g_B Z_2^{\frac{3}{2}} = g\mu^{2-\frac{n}{2}} + \delta_{g2}, \qquad g_B^2 Z_2^2 = g^2\mu^{4-n} + \delta_{g3} \tag{572}$$

$$g_B Z_2^{\frac{1}{2}} Z_3 = g\mu^{2-\frac{n}{2}} + \delta_{g4} \tag{573}$$

となる。従って繰り込まれた量とカウンター項とで分けて書けば

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \bar{\psi}(\frac{1}{i}\partial\!\!\!/ + m)\psi + i\bar{c}^a\partial^2 c^a \\
&\quad -g\mu^{2-\frac{n}{2}}A^a_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi + g\mu^{2-\frac{n}{2}}f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu)A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{1}{4}g^2\mu^{4-n}f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu}A^{e\nu} \\
&\quad -ig\mu^{2-\frac{n}{2}}f^{acb}\bar{c}^a\partial^\mu(A^c_\mu c^b) \\
&\quad -\frac{1}{4}\delta_2 F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \bar{\psi}(\frac{1}{i}\delta_1\partial\!\!\!/ + \delta_m)\psi + i\delta_3\bar{c}^a\partial^2 c^a \\
&\quad -\delta_{g1}A^a_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi + \delta_{g2}f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu)A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{1}{4}\delta_{g3}f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu}A^{e\nu} \\
&\quad -i\delta_{g4}f^{acb}\bar{c}^a\partial^\mu(A^c_\mu c^b)
\end{aligned} \tag{574}$$

と書ける。

次に非可換ゲージ理論の Feynman rule を書き下そう。フェルミオンは実線で、ゲージ場は波線で、ゴースト場は点線で表すことにする。時空を Euclid 時空へ移した時、Feynman rule は以下の通りである。プロパゲータ及び相互作用項は



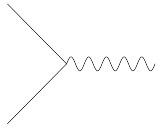
$$= \frac{-p\!\!\!/ + m}{p^2 + m^2} \tag{575}$$



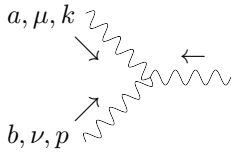
$$= \frac{\eta_{\mu\nu}\delta^{ab}}{p^2} \tag{576}$$



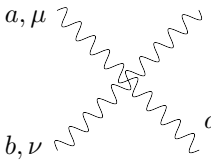
$$= \frac{i\delta^{ab}}{p^2} \tag{577}$$



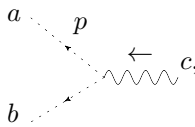
$$= -g\mu^{2-\frac{n}{2}}T^a\gamma^\mu \tag{578}$$




$$= -ig\mu^{2-\frac{n}{2}}f^{abc}\Big(\eta^{\mu\nu}(k-p)^\rho + \eta^{\nu\rho}(p-q)^\mu + \eta^{\rho\mu}(q-k)^\nu\Big) \tag{579}$$

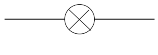



$$\begin{aligned}
= -g^2\mu^{4-n}\Big(&f^{abe}f^{cde}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \\
&+f^{ace}f^{bde}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \\
&+f^{ade}f^{bce}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma})\Big)
\end{aligned} \tag{580}$$



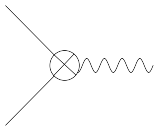

$$= g\mu^{2-\frac{n}{2}}f^{acb}p_\mu \tag{581}$$

である。カウンター項は



$$= -(\delta_1 \not{p} + \delta_m) \tag{582}$$

$$= -(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\delta^{ab}\delta_2 \tag{583}$$



$$= -\delta_{g1} T^a \gamma^\mu \tag{584}$$

である。フェルミオンの自己相互作用項を $\Sigma(\not{p})$ で、ゲージ場のを $\Pi^{ab\mu\nu}(p)$ で、2 つのフェルミオンとゲージ場の散乱振幅を $\Gamma^\mu(p)$ で書くことにし、繰り込まれる前のものを ${}_B$ の添え字を付けて表せば

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma_B(\not{p}) - (\delta_1 \not{p} + \delta_m) \tag{585}$$

$$\Pi^{ab\mu\nu} = \Pi_B^{ab\mu\nu}(p) - (p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\delta^{ab}\delta_2 \tag{586}$$

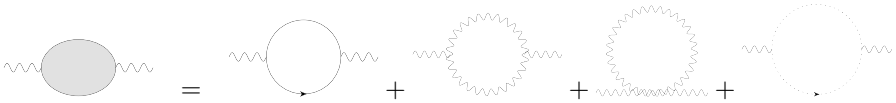
$$\Gamma^{a\mu}(p) = \Gamma_B^{a\mu}(p) - \delta_{g1} T^a \gamma^\mu \tag{587}$$

となる。

まずゲージ場の自己相互作用

$$= \frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2}\Pi_B^{ab\nu\rho}(p)\frac{\eta_{\rho\sigma}}{p^2} \tag{588}$$

の繰り込みから始める。1 ループの order では

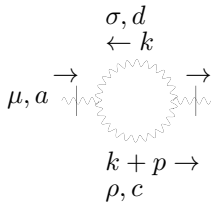


$$= \frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2}\left(\Pi_{1B}^{ab\nu\rho}(p) + \Pi_{2B}^{ab\nu\rho}(p) + \Pi_{3B}^{ab\nu\rho}(p) + \Pi_{gB}^{ab\mu\nu}\right)\frac{\eta_{\rho\sigma}}{p^2} \tag{589}$$

である。$\Pi_{1B}^{ab\nu\rho}(p)$、$\Pi_{2B}^{ab\nu\rho}(p)$、$\Pi_{3B}^{ab\nu\rho}(p)$、$\Pi_{gB}^{ab\mu\nu}$ は 1 段目のグラフに順番通りに対応する。$\Pi_{1B}^{ab\nu\rho}(p)$ は QED の同じグラフのものとほぼ同様で、違いは $T^a$ がグラフの頂点についているということだけである。従って

$$\begin{aligned}\Pi_{1B}^{ab\mu\nu}(p) &= \frac{16g^2}{6(4\pi)^2}\mathrm{tr}(T^aT^b)\left(\frac{1}{n-4} + \text{finite}\right)(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \\ &= \frac{16g^2}{6(4\pi)^2}\delta^{ab}\left(\frac{1}{n-4} + \text{finite}\right)(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\end{aligned} \tag{590}$$

次に 2 つ目のダイアグラムは




$$\begin{aligned}&= \Pi_{2B}^{ab\mu\nu}(p) \\ &= -\frac{1}{2}g^2\mu^{4-n}\int\frac{d_E^n k}{(2\pi)^n}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(k+p)^2} \\ &\quad\times f^{acd}f^{bcd}\Big(\eta^{\mu\rho}(k+2p)^\sigma + \eta^{\rho\sigma}(-2k-p)^\mu + \eta^{\sigma\mu}(k-p)^\rho\Big) \\ &\quad\times\Big(\delta^\nu_\rho(-k-2p)_\sigma + \eta_{\rho\sigma}(2k+p)^\nu + \delta^\nu_\sigma(-k+p)_\rho\Big)\end{aligned} \tag{591}$$

ここで計算を分けて行おう。被積分関数のカッコ内は

$$\begin{aligned}\Big(\cdots\Big)\times\Big(\cdots\Big) &= -\eta^{\mu\nu}\Big((k+2p)^2+(k-p)^2\Big)-n(2k+p)^\mu(2k+p)^\nu \\ &\quad +(k+2p)^\mu(2k+p)^\nu-(k-p)^\mu(k+2p)^\nu+(2k+p)^\mu(k+2p)^\nu \\ &\quad +(2k+p)^\mu(k-p)^\nu-(k+2p)^\mu(k-p)^\nu+(k-p)^\mu(2k+p)^\nu \\ &= -\eta^{\mu\nu}(2k^2+2kp+5p^2) \\ &\quad +(-4n+6)k^\mu k^\nu+(-2n+3)k^\mu p^\nu+(-2n+3)p^\mu k^\nu+(-n+6)p^\mu p^\nu \end{aligned} \tag{592}$$

従って

$$\begin{aligned}\Pi_{2B}^{ab\mu\nu}(p) &= -\frac{1}{2}g^2f^{acd}f^{bcd}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(2-\frac{n}{2})\int d\alpha\left(\frac{p^2\alpha(1-\alpha)}{\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}-2} \\ &\quad\times\Big[\eta^{\mu\nu}\Big(-\frac{2n}{2-n}p^2\alpha(1-\alpha)-2p^2\alpha^2+2p^2\alpha-5p^2\Big)+\frac{-4n+6}{2-n}\eta^{\mu\nu}p^2\alpha(1-\alpha) \\ &\qquad +(-4n+6)\alpha^2p^\mu p^\nu-(-4n+6)\alpha p^\mu p^\nu+(-n+6)p^\mu p^\nu\Big] \\ &= g^2f^{acd}f^{bcd}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{n-4}\int d\alpha\Big[\eta^{\mu\nu}\Big(11\alpha(1-\alpha)-5\Big)p^2+(-10\alpha^2+10\alpha+2)p^\mu p^\nu\Big]+\text{finite}\end{aligned} \tag{593}$$

次に 3 つ目のダイアグラムの計算をする。

$$\begin{aligned}&= \Pi_{3B}^{ab\mu\nu} \\ &= -\frac{g^2}{2}\mu^{4-n}\int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}\frac{\eta_{\rho\sigma}}{k^2}\delta^{cd}\Big(f^{abe}f^{cde}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}-\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \\ &\qquad +f^{ace}f^{bde}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}-\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \\ &\qquad +f^{ade}f^{bce}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}-\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma})\Big)\end{aligned} \tag{594}$$

ここで被積分関数のカッコ内の最初の段は構造因子の反対称性により消える。従って

$$\Pi_{3B}^{ab\mu\nu} = -g^2\mu^{4-n}f^{acd}f^{bcd}(n-1)\eta^{\mu\nu}\int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{k^2} \tag{595}$$

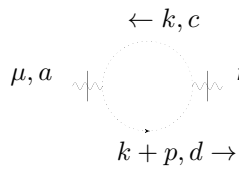
ここで積分を計算する。

$$\begin{aligned}\mu^{4-n}\int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{k^2} &= \mu^{4-n}\int\frac{d_E^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(k+p)^2}(k+p)^2 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(2-\frac{n}{2})\int d\alpha\left(\frac{p^2\alpha(1-\alpha)}{\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{n}{2-n}p^2\alpha(1-\alpha)+p^2\alpha^2-2p^2\alpha+p^2\right) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{n-4}\int d\alpha\Big(4p^2\alpha(1-\alpha)-2p^2(\alpha-1)^2\Big)+\text{finite}\end{aligned} \tag{596}$$

従って

$$\Pi_{3B}^{ab\mu\nu} = -g^2f^{acd}f^{bcd}\frac{3}{(4\pi)^2}\frac{1}{n-4}\eta^{\mu\nu}\int d\alpha\Big(4p^2\alpha(1-\alpha)-2p^2(\alpha-1)^2\Big)+\text{finite} \tag{597}$$

となる。次に 4 つ目のダイアグラムの計算。




$$
\begin{aligned}
&= \Pi_{gB}^{ab\mu\nu} \\
&= -g^2\mu^{4-n} f^{dac} f^{cbd} \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2} \frac{i}{(k+p)^2} (k+p)^\mu k^\nu
\end{aligned} \tag{598}
$$

ここで構造因子の添え字の付き方が上の 2 つのダイアグラムと異なることに注意。積分は

$$
\begin{aligned}
\mu^{4-n} \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2} (k+p)^\mu k^\nu &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma(2-\frac{n}{2}) \int d\alpha \left( \frac{p^2\alpha(1-\alpha)}{\mu^2} \right)^{\frac{n}{2}-2} \\
&\quad \times \left( \frac{\eta^{\mu\nu}}{2-n} p^2\alpha(1-\alpha) + \alpha^2 p^\mu p^\nu - \alpha p^\mu p^\nu \right) \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \int d\alpha \left( -\eta^{\mu\nu} p^2 \alpha(1-\alpha) + 2\alpha(\alpha-1) p^\mu p^\nu \right) \\
&\quad + \text{finite}
\end{aligned} \tag{599}
$$

従って

$$
\Pi_{gB}^{ab\mu\nu} = g^2 f^{acd} f^{bcd} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \int d\alpha \left( -\eta^{\mu\nu} p^2 \alpha(1-\alpha) + 2\alpha(\alpha-1) p^\mu p^\nu \right) + \text{finite} \tag{600}
$$

となる。以上によりまとめると

$$
\Pi_{2B}^{ab\mu\nu} + \Pi_{3B}^{ab\mu\nu} + \Pi_{gB}^{ab\mu\nu} = -g^2 C \delta^{ab} \frac{10}{3(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) + \text{finite} \tag{601}
$$

を得る。ここで $f^{acd} f^{bcd} = C\delta^{ab}$ である（付録"$SU(N)$"参照）。以上によりゲージ場の自己相互作用がもとまるが、ここでフェルミオンに関して、構造群 $SU(N)$ が作用するディラック場が $n_f$ 個ある場合に拡張しておく。従って

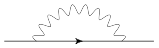
$$
\Pi_B^{ab\mu\nu} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \delta^{ab} \left( \frac{8}{3} n_f - \frac{10}{3} C \right) (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) + \text{finite} \tag{602}
$$

実際に QCD などでは $SU(3)$ の作用するフェルミオン（クオーク）の種類が複数あることからこのように少し拡張しておいた。以上により

$$
\delta_2 = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \left( \frac{8}{3} n_f - \frac{10}{3} C \right) \tag{603}
$$

となる。

次にフェルミオンの自己相互作用を計算する。



$$
= \frac{-\not{p} + m}{p^2 + m^2} \Sigma_B(\not{p}) \frac{-\not{p} + m}{p^2 + m^2} \tag{604}
$$

であり、これは QED の場合と全く同じ計算である。$T^a$ が挿入されるところだけ異なる。

$$
\begin{aligned}
\Sigma_B(\not{p}) &= g^2 \mu^{4-n} \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} T^a \gamma^\mu \frac{-\not{k} + m}{k^2 + m^2} T^a \gamma^\nu \frac{\eta_{\mu\nu}}{(k-p)^2} \\
&= \frac{2g^2}{(4\pi)^2} T^2 \left( \frac{1}{n-4} (\not{p} + 4m) + \text{finite} \right)
\end{aligned} \tag{605}
$$

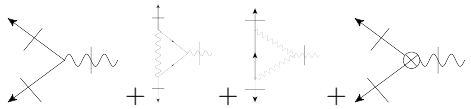
従って

$$\delta_1 = \frac{2g^2}{(4\pi)^2} T^2 \frac{1}{n-4}, \quad \delta_m = \frac{8g^2 m}{(4\pi)^2} T^2 \frac{1}{n-4} \tag{606}$$

を得る。

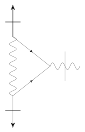
最後に 2 つのフェルミオンとゲージ場の相互作用の散乱振幅の計算。

$\Gamma^{a\mu}(p)$ =



(607)

最初のダイアグラムは上で与えた Feynman rule にある、tree ダイアグラムである。2 つ目のダイアグラムの計算から始める。これも QED と全く同じ計算で異なるのは $T^a$ が挿入されるところだけである。

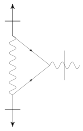


$$\begin{aligned} &= -g^3(\mu^{2-\frac{n}{2}})^3 \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{\eta_{\rho\nu}}{(k-p_1)^2} T^b \gamma^\rho \frac{-\not{k} + m}{k^2+m^2} T^a \gamma^\mu \frac{-(\not{k} - \not{p}_2) + m}{(k-p_2)^2+m^2} T^b \gamma^\nu \\ &= \frac{2g^3 \mu^{2-\frac{n}{2}}}{(4\pi)^2} T^b T^a T^b \gamma^\mu \left( \frac{1}{n-4} + \text{finite} \right) \end{aligned} \tag{608}$$

となる。ここで

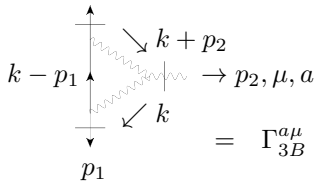
$$\begin{aligned} T^b T^a T^b &= T^b T^b T^a + T^b [T^a, T^b] \\ &= T^2 T^a + i f^{abc} T^b T^c \\ &= T^2 T^a + \frac{i}{2} f^{abc} [T^b, T^c] \\ &= T^2 T^a - \frac{1}{2} f^{abc} f^{bcd} T^d \\ &= (T^2 - \frac{1}{2} C) T^a \end{aligned} \tag{609}$$

より



$$= \frac{2g^3 \mu^{2-\frac{n}{2}}}{(4\pi)^2} (T^2 - \frac{1}{2} C) T^a \gamma^\mu \left( \frac{1}{n-4} + \text{finite} \right) \tag{610}$$

を得る。次に 3 つ目のダイアグラムの計算を行う。




$$\begin{aligned} &= \Gamma^{a\mu}_{3B} \\ &= -ig^3(\mu^{2-\frac{n}{2}})^3 \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} T^b \gamma_\nu \frac{-(\not{k} - \not{p}_1) + m}{(k-p_1)^2+m^2} T^c \gamma_\rho \frac{1}{k^2} \\ &\quad \times f^{abc} \left( \eta^{\mu\nu}(-p_2 - k - p_2)^\rho + \eta^{\nu\rho}(k + p_2 + k)^\mu + \eta^{\rho\mu}(-k + p_2)^\nu \right) \frac{1}{(k+p_2)^2} \\ &= -ig^3(\mu^{2-\frac{n}{2}})^3 f^{abc} T^b T^c \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k-p_1)^2+m^2} \frac{1}{(k+p_2)^2} \frac{1}{k^2} \\ &\qquad \times \left( \gamma^\mu \not{k} \not{k} - 2\gamma_\nu \not{k} \gamma^\nu k^\mu + \not{k} \not{k} \gamma^\mu \right) + \text{finite} \end{aligned} \tag{611}$$

ここで積分は

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k-p_1)^2+m^2} \frac{1}{(k+p_2)^2} \frac{1}{k^2} \Big( \gamma^\mu \not{k} \not{k} - 2\gamma_\nu \not{k} \gamma^\nu k^\mu + \not{k} \not{k} \gamma^\mu \Big) \\
= & \int \frac{d_E^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k-p_1)^2+m^2} \frac{1}{(k+p_2)^2} \frac{1}{k^2} \Big( -2\gamma^\mu k^2 - 2(n-2) \not{k} k^\mu \Big) \\
= & \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma(2-\frac{n}{2}) (-2n+2) \gamma^\mu \int d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 M^{\frac{n}{2}-2} \delta(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1) + \text{finite} \qquad (612)
\end{aligned}$$

ここで $M = -(p_1\alpha_1 - p_2\alpha_2)^2 + (p_1^2+m^2)\alpha_1 + p_2^2\alpha_2$ である。また

$$\begin{aligned}
f^{abc} T^b T^c &= \frac{1}{2} f^{abc} [T^b, T^c] \\
&= \frac{i}{2} f^{abc} f^{bcd} T^d \\
&= \frac{iC}{2} T^a \qquad (613)
\end{aligned}$$

である。従って

$$\begin{aligned}
\Gamma_{3B}^{a\mu} &= -\frac{g^3 \mu^{2-\frac{n}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (n-1) C T^a \gamma^\mu \Gamma(2-\frac{n}{2}) \int d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \Big( \frac{M}{\mu^2} \Big)^{\frac{n}{2}-2} \delta(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1) + \text{finite} \\
&= \frac{3g^3 \mu^{2-\frac{n}{2}}}{(4\pi)^2} C T^a \gamma^\mu \Big( \frac{1}{n-4} + \text{finite} \Big) \qquad (614)
\end{aligned}$$

となる。これらより

$$\Gamma^{a\mu}(p) = -g\mu^{2-\frac{n}{2}} T^a \gamma^\mu \Big( 1 - \frac{2g^2}{(4\pi)^2} (T^2+C) \frac{1}{n-4} + \text{finite} \Big) - \delta_{g1} T^a \gamma^\mu \qquad (615)$$

従って

$$\delta_{g1} = \frac{2g^3 \mu^{2-\frac{n}{2}}}{(4\pi)^2} \Big( T^2 + C \Big) \frac{1}{n-4} \qquad (616)$$

結合定数と質量の繰り込み群方程式を求めるには以上の計算で十分である。ここまで計算したカウンター項より

$$Z_1 = 1 + \frac{2g^2}{(4\pi)^2} T^2 \frac{1}{n-4}, \qquad Z_2 = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \Big( \frac{8}{3} n_f - \frac{10}{3} C \Big) \qquad (617)$$

$$g_B Z_1 Z_2^{\frac{1}{2}} = g\mu^{2-\frac{n}{2}} \Big( 1 + \frac{2g^2}{(4\pi)^2} (T^2+C) \frac{1}{n-4} \Big), \qquad m_B Z_1 = m \Big( 1 + \frac{8g^2}{(4\pi)^2} T^2 \frac{1}{n-4} \Big) \qquad (618)$$

が得られる。繰り込まれる前のパラメータは（$g^3$ の order で）

$$g_B = g\mu^{2-\frac{n}{2}} \Big( 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{n-4} \Big( \frac{11}{3} C - \frac{4}{3} n_f \Big) \Big), \qquad m_B = m \Big( 1 + \frac{6g^2}{(4\pi)^2} T^2 \frac{1}{n-4} \Big) \qquad (619)$$

繰り込み群方程式は QED の時と同じで、これら繰り込まれる前のパラメータがエネルギースケール $\mu$ に依存しないという条件より得られる。計算すると（$g^3$ の order で）

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \frac{n-4}{2} g - \frac{g^3}{(4\pi)^2} \Big( \frac{11}{3} C - \frac{4}{3} n_f \Big), \qquad \mu \frac{dm}{d\mu} = -\frac{6g^2 T^2}{(4\pi)^2} m \qquad (620)$$

が得られる。特に $n=4$ では結合定数の繰り込み群方程式は

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \Big( \frac{11}{3} C - \frac{4}{3} n_f \Big) \qquad (621)$$

となる。この繰り込み群方程式の右辺はフェルミオンの種類の数 $n_f$ が十分少なければ負となる。従ってその場合には結合定数は高エネルギーに行けば 0 へ近づくことが分かる。このように高エネルギーにおいて結合定数が 0 に近づく時、理論は漸近自由性を持つという。スカラー場の時の繰り込み群の計算により、散乱振幅の繰り込み群による振る舞いを計算した。そこでの結果を照らし合わせれば、高エネルギーにおいて結合定数が 0 に近づくということは、高エネルギーでは相互作用の効果が実際に 0 に近づくことを意味していることが分かる。即ち高エネルギーでは粒子が自由粒子のように振る舞うようになるということを意味している。この性質は QCD において、クオークが実際に持つ性質である。このように自由粒子のように振る舞うクオークをパートンとも呼んだりする。歴史的には核子の深部非弾性散乱の実験が自由粒子のモデルであるパートンモデルにより説明された。そこで低エネルギーでは強く相互作用をし、高エネルギーにおいて相互作用が弱くなる漸近自由性を持つ場の理論が求められた。スカラー場の理論では以前計算したように漸近自由性を持たないことが分かっていた。その後に非可換ゲージ理論の漸近自由性が示され、非可換ゲージ理論が QCD のモデルとして採用された。

最後に注意として、この note では $\mathfrak{su}(N)$ の直交基底として正規直交基を選んでいるが、慣習として QCD などでは $\mathrm{tr}T^aT^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ と取ったりする。一般には規格化せずに $\mathrm{tr}T^aT^b = N\delta^{ab}$ などとした場合には上の繰り込み群方程式は

$$\mu\frac{dg}{d\mu} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}C - \frac{4}{3}n_f N\right) \tag{622}$$

となる。

# 6 アノマリー

## 6.1 ABJ アノマリー

ここまででいくつか Ward-高橋の関係式に触れてきた。その際に暗黙のうちに仮定してた条件がある。それはラグランジアンの持つ対称性を保つ変換のもと、汎関数積分の測度が不変であるという条件である。多くの場合、これは正しい。しかし変換が、スピノールの異なる chirality（左巻きと右巻き）で異なる場合には正しくない。これを見るのにまずフェルミオン $\psi$ を正規直交基で表示する。

$$\psi(x) = \sum_i a_i\varphi_i(x), \qquad \bar{\psi} = \sum_i \bar{\varphi}_i(x)a_i^\dagger \tag{623}$$

$$\int d^4x\bar{\varphi}_i(x)\varphi_j(x) = \delta_{ij} \tag{624}$$

ここで $a_i \in G_1^c$（$G_1^c$ の定義は"経路積分"note 参照）である。$\varphi_i(x)$ はスピノールの添え字を持った（グラスマン数ではない）スピノール束のファイバーでもある。さらにここで正規直交基 $\varphi_i$ をディラック作用素 $\not{\nabla}$ の固有関数にとる。即ち

$$\frac{1}{i}\not{\nabla}\varphi_i(x) = \lambda_i\varphi(x) \tag{625}$$

これはディラック作用素 $\frac{1}{i}\not{\nabla} = D$ が自己共役作用素であるのでこのように対角化出来る。フェルミオンの汎関数積分の測度は

$$[d\bar{\psi}][d\psi] = [da_i^\dagger][da_i] \tag{626}$$

となる。

さてここで chiral 変換

$$\psi(x) \to \acute{\psi}(x) = e^{i\alpha(x)\gamma^5}\psi(x) \tag{627}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \acute{\bar{\psi}}(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)\gamma^5} \tag{628}$$

を考える（$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ に注意）。これは $\gamma^5$ が入っているために左巻きと右巻きとで変換が異なる。ラグランジアンは非可換ゲージ理論のものでもいいし、QED のものでもよい。$\alpha$ がただの定数であり、フェルミオンが質量項を持たない（$m = 0$）であればラグランジアンは不変である。この変換のもとフェルミオンのラグランジアンは

$$\delta\mathcal{L} = -(\partial_\mu\alpha(x))\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x) - 2im\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{629}$$

だけ変化する。ここでこの変換のもとで汎関数積分の測度が不変であるならば、このままこれまで通りに Ward-高橋の関係式が導けるのであるが、実際には測度は不変ではない。

まずこの変換のもとでの $\psi(x)$ の正規直交基 $\varphi_i(x)$ での表示の係数は

$$\begin{aligned} \acute{a}_i &= \sum_j \left( \int d^4x \bar{\varphi}_i(x) e^{i\alpha(x)\gamma^5} \varphi_j(x) \right) a_j \\ &= \sum_j C_{ij} a_j \end{aligned} \tag{630}$$

となる。ここで測度は

$$[d\acute{a}_i] = \det C_{ij}^{-1} [da_j] \tag{631}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \det C_{ij}^{-1} &= \det \left( \int d^4x \bar{\varphi}_i(x) e^{i\alpha(x)\gamma^5} \varphi_j(x) \right)_{ij}^{-1} \\ &= \exp\left( -\mathrm{tr} \ln \left( 1 + i\alpha(x) \int d^4x \bar{\varphi}_i(x) \gamma^5 \varphi_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right)_{ij} \right) \\ &= \exp\left( -i \sum_i \int d^4x \alpha(x) \bar{\varphi}_i(x) \gamma^5 \varphi_i(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \\ &= \exp\left( -i \int d^4x \alpha(x) A(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \end{aligned} \tag{632}$$

となる。ここで

$$A(x) := \sum_i \bar{\varphi}_i(x) \gamma^5 \varphi_i(x) \tag{633}$$

である。”トポロジー”note の超空間の節、及び”クリフォード代数”note のディラック作用素の節を見れば分かるように（記号の定義もそれらを参照）、

$$\begin{aligned} \int d^4x A(x) &= \sum_i \int d^4x \bar{\varphi}_i(x) \gamma^5 \varphi_i(x) \\ &= \sum_i (\varphi_i, \gamma^5 \varphi_i) \\ &= -\mathrm{Str}1 \\ &= -\mathrm{Str} e^{-tD^2} \\ &= -\mathrm{ind} D \end{aligned} \tag{634}$$

である（”トポロジー”note のマッキーン・シンガーの定理の証明を見れば分かるように $t$ には実際には依存してないことに注意）。ここで $D = \frac{1}{i}\not{\nabla}$ である。即ち測度の変化からディラック作用素の指数が現れるのである。指数の定義は”トポロジー”note、もしくは”クリフォード代数”note によれば

$$\mathrm{ind} D = \dim \mathrm{Ker} D_L - \dim \mathrm{Ker} D_R \tag{635}$$

であるが、これは左巻きと右巻きのゼロモードのフェルミオンの差であると読み取れる。また $A(x)$ は具体的に計算出来る。それにはマッキーン・シンガーの定理を参考にして（$t=\left(\frac{i}{M}\right)^2$ と置いて）

$$\begin{aligned} A(x) &= \lim_{M\to\infty}\left(\sum_i \bar{\varphi}_i(x)\gamma^5 e^{-\left(\frac{i\lambda_i}{M}\right)^2}\varphi_i(x)\right) \\ &= \lim_{M\to\infty}\left(\sum_i \bar{\varphi}_i(x)\gamma^5 e^{-\left(\frac{iD}{M}\right)^2}\varphi_i(x)\right) \\ &= \lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma^5 e^{-ikx}e^{-\left(\frac{iD}{M}\right)^2}e^{ikx} \end{aligned} \tag{636}$$

積分はここで

$$\begin{aligned} D^2 &= -\not{\nabla}^2 \\ &= -\gamma^\mu\gamma^\nu\nabla_\mu\nabla_\nu \\ &= -\left(\frac{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}}{2}+\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}{2}\right)\nabla_\mu\nabla_\nu \\ &= \nabla^2-\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu \\ &= \nabla^2-\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}{4}[\nabla_\mu,\nabla_\nu] \\ &= \nabla^2-ig\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}{4}F_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{637}$$

より

$$\begin{aligned} A(x) &= \lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma^5 e^{-ikx}\exp\left[\frac{-1}{M^2}\left(-\nabla^2+ig\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}{4}F_{\mu\nu}\right)\right]e^{ikx} \\ &= \lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma^5\exp\left[\frac{-1}{M^2}\left(-(ik+\nabla)^2+ig\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}{4}F_{\mu\nu}\right)\right] \\ &= \lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\gamma^5\left(ig[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right)^2\frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{4M^2}\right)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-\frac{k^2}{M^2}} \end{aligned} \tag{638}$$

最後の等式は $\mathrm{tr}\gamma^5\gamma^\mu\cdots\gamma^\nu$ がガンマ行列の数が 4 つより少ない場合には 0 となることに注意すればよい。ここでこのまま計算すると運動量積分で発散してしまうので、Wick 回転して Euclid 時空へ移して計算すれば

$$\begin{aligned} \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-\frac{k^2}{M^2}} &= i\int\frac{d_E^4k}{(2\pi)^4}e^{-\frac{k^2}{M^2}} \\ &= i\frac{M^4\pi^2}{(2\pi)^4} \end{aligned} \tag{639}$$

となる。従って

$$A(x) = -\frac{g^2}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}, \quad \left(=-\frac{g^2}{8\pi^2}\mathrm{tr}F\wedge F=\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\Omega\wedge\Omega\right) \tag{640}$$

が得られる。”ゲージ理論”note によれば、これはまさに第 2Chern 指標（もしくは第 1Pontrjagin 類）（の反対符号）である。この結果は局所指数定理として知られている。これを積分すれば

$$\mathrm{ind}D=\int_M ch_2(E,\nabla) \tag{641}$$

と指数定理が得られる。

以上により

$$\det C_{ij}^{-1} = \exp\left(\frac{ig^2}{8\pi^2}\int \alpha(x)\mathrm{tr}F\wedge F + \mathcal{O}(\alpha^2)\right) \tag{642}$$

が得られる。よって測度は

$$[d\acute{a}_i^\dagger][d\acute{a}_i] = [da_i^\dagger][da_i]\exp\left(\frac{ig^2}{4\pi^2}\int \alpha(x)\mathrm{tr}F\wedge F + \mathcal{O}(\alpha^2)\right) \tag{643}$$

と変化する。従って汎関数積分は

$$Z(\eta,\bar\eta,J^\mu) = \int [d\bar\psi][d\psi][dA_\mu]\exp\left(i\int(\mathcal{L}+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta - gJ^\mu A_\mu)\right) \tag{644}$$

なので、Ward-高橋の関係式は

$$\left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta}{\delta\bar\eta(x_2)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}Z(\eta,\bar\eta,J^\mu)\Big|_{\alpha=\eta=\bar\eta=0} = 0 \tag{645}$$

により得られる。計算すれば

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T\partial_\mu J_5^\mu(x)\psi(x_2)\bar\psi(x_3)e^{i\int V^*}|0\rangle \\
&= 2mi\langle 0|TJ_5(x)\psi(x_2)\bar\psi(x_3)e^{i\int V^*}|0\rangle - \frac{ig^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\langle 0|TF^a_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}(x)\psi(x_2)\bar\psi(x_3)e^{i\int V^*}|0\rangle \\
&-i\delta^{(4)}(x-x_2)\langle 0|T\gamma^5\psi(x_2)\bar\psi(x_3)e^{i\int V^*}|0\rangle - i\delta^{(4)}(x-x_3)\langle 0|T\psi(x_2)\bar\psi(x_3)\gamma^5 e^{i\int V^*}|0\rangle
\end{aligned} \tag{646}$$

が得られる。ここで

$$J_5^\mu := \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad J_5 := \bar\psi\gamma^5\psi \tag{647}$$

である。測度の変化分から来る $\mathrm{tr}F\wedge F$ を含む項が余分に加わっている。これを Adler-Bell-Jackiw アノマリー（ABJ アノマリー）という。

## 6.2 ゲージアノマリー

前節では一般的に $\gamma^5$ を含んだ axial な変換に対する Ward-高橋の関係式を導いた。そこで汎関数積分の測度の変化により Ward-高橋の関係式が naive な計算と異なってしまうことを見た。一方で非可換ゲージ理論における繰り込み可能性はゲージ対称性から得られる Ward-高橋の関係式により得られるのであるが、構造群が $\gamma^5$ を含むような場合には、前節で見たようにアノマリーのためにその Ward-高橋の関係式が成り立たなくなってしまう。これをゲージアノマリーという。そこでゲージ対称性に関しては、繰り込み可能性が成り立つためにはこのアノマリーが消えないといけない。この節ではその条件を求めよう。そこで今度は構造群が $\gamma^5$ を含むような axial ゲージの場合を考えよう。つまり今度はゲージ変換が axial な

$$\exp\left(i\alpha^a(x)T^a\gamma^5\right) \tag{648}$$

で与えられるゲージ対称性である。前節までの記号をそのまま使うと

$$\begin{aligned}
A^a(x) &:= \lim_{M\to\infty}\left(\sum_i \bar\varphi_i(x)\gamma^5 T^a e^{-\left(\frac{i\lambda_i}{M}\right)^2}\varphi_i(x)\right) \\
&= \lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\gamma^5 T^a\left(ig[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right)^2\frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{4M^2}\right)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-\frac{k^2}{M^2}} \\
&= \mathrm{tr}(T^aT^bT^c)\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\gamma^5\left(ig[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F^b_{\mu\nu}\right)\left(ig[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F^c_{\mu\nu}\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{4M^2}\right)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-\frac{k^2}{M^2}} \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}T^a\{T^b,T^c\}\frac{g^2}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^b_{\mu\nu}F^c_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{649}$$

となる。従ってゲージアノマリーが消える条件は

$$\mathrm{tr}T^a\{T^b,T^c\}=0 \tag{650}$$

である。

もう少し一般的なゲージ対称性

$$\exp\Big(i\alpha^a(x)T^a\Big) \tag{651}$$

の場合。ここで $T^a$ は $\gamma^5$ を一次式の形で含んだ行列である。言い換えれば構造群は同じだが、右巻きと左巻きとで異なる表現となってる場合である。具体的には

$$T^a=T^a_L+T^a_R\quad\left(=\begin{pmatrix}T^a_L & 0\\ 0 & T^a_R\end{pmatrix}\right),\quad T^a_RT^b_L=T^b_LT^a_R=0 \tag{652}$$

（スピノールの成分で行列を表している）と書ける場合である[13]。この場合にはスピノールを左巻きと右巻きの Weyl スピノールに分けて考える必要がある。

$$\chi_L=\sum_i a_i\varphi_{Li}(x),\quad \chi_R=\sum_i b_i\phi_{Ri} \tag{654}$$

$$\int d^4x\varphi^\dagger_{Ri}\varphi_{Lj}=\int d^4x\phi^\dagger_{Li}\phi_{Rj}=\delta_{ij} \tag{655}$$

ここで $\varphi_{Ci}\ \ (C=L,R)$ に作用する構造群の生成子は $T^a_L$ であり、$\phi_{Ci}$ に作用する構造群の生成子は $T^a_R$ である。汎関数積分の測度は

$$[d\chi^\dagger_{Li}][d\chi_{Ri}][d\chi_{Li}][d\chi_{Ri}]=[da^\dagger_i][db^\dagger_i][da_i][db_i] \tag{656}$$

である。ゲージ変換は

$$\chi_L\to\acute{\chi}_L=e^{i\alpha^aT^a_L}\chi_L \tag{657}$$

$$\chi_R\to\acute{\chi}_R=e^{i\alpha^aT^a_R}\chi_R \tag{658}$$

で与えられる。この変換のもと $\chi_L$、$\chi_R$ の正規直交基 $\varphi_{Li}$、$\phi_{Ri}$ での表示の係数は

$$\begin{aligned}\acute{a}_i &= \sum_j\Big(\int d^4x\varphi^\dagger_{Ri}e^{i\alpha^aT^a_L}\varphi_{Li}\Big)a_j\\ &= \sum_j C_{Lij}a_j\end{aligned} \tag{659}$$

$$\begin{aligned}\acute{b}_i &= \sum_j\Big(\int d^4x\phi^\dagger_{Li}e^{i\alpha^aT^a_R}\phi_{Rj}\Big)b_j\\ &= \sum_j C_{Rij}b_j\end{aligned} \tag{660}$$

で与えられる。従って測度の変化分は

$$A^a_L(x)=\sum_i\varphi^\dagger_{Ri}T^a_L\varphi_{Li} \tag{661}$$

$$A^a_R(x)=\sum_i\phi^\dagger_{Li}T^a_R\phi_{Ri} \tag{662}$$

[13]一応注意しておく。フェルミオンは

$$\psi=\begin{pmatrix}\chi_L\\ \chi_R\end{pmatrix} \tag{653}$$

と書けた。従って構造群の生成子の表現を左巻きと右巻きに分けて $T^a_L$、$T^a_R$ と表した時には $T^a_L$（$T^a_R$）の右巻き（左巻き）の表現は 0 となる。

と置けば

$$\det C_{Lij}^{-1} = \exp\left(-i\int d^4x\alpha^a(x)A_L^a(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right) \tag{663}$$

$$\det C_{Rij}^{-1} = \exp\left(-i\int d^4x\alpha^a(x)A_R^a(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right) \tag{664}$$

の変化分からくるので、全体として

$$[d\acute{\psi}][d\acute{\bar{\psi}}] = [d\bar{\psi}][d\psi]\exp\left(-i\int d^4\alpha^a\left(A_L^a(x) + A_R^a(x) - A_L^{a\dagger}(x) - A_R^{a\dagger}(x)\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right) \tag{665}$$

と書ける。ここでさらに

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{Li} \\ \varphi_{Ri} \end{pmatrix}, \quad \phi_i = \begin{pmatrix} \phi_{Li} \\ \phi_{Ri} \end{pmatrix} \tag{666}$$

と置けば、

$$A_L^a + A_R^a - A_L^{a\dagger} - A_R^{a\dagger} = -\sum_i \bar{\varphi}_i\gamma^5 T_L^a\varphi_i + \sum_i \bar{\phi}_i\gamma^5 T_R^a\phi_i =: A^a \tag{667}$$

と書けるので、後はこれまでの計算とほぼ同様に計算出来る。左巻きのほうをまず計算すると

$$\begin{aligned} -A_L^a(x) + A_L^{a\dagger}(x) &= \lim_{M\to\infty}\left(\sum_i \bar{\varphi}_i(x)\gamma^5 T_L^a e^{-\left(\frac{i\lambda_i}{M}\right)^2}\varphi_i(x)\right) \\ &= -g^2\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\left(\gamma^5 T_L^a[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{L\mu\nu}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]F_{L\rho\sigma}\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{4M^2}\right)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-\frac{k^2}{M^2}} \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(T_L^a\{T_L^b,T_L^c\}\right)\frac{g^2}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \end{aligned} \tag{668}$$

となる[14]。ここで $F_{L\mu\nu} := T_L^a F_{\mu\nu}^a$ である。右巻きも同様である。従って結果として

$$A^a(x) = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}T_R^a\{T_R^b,T_R^c\} - \mathrm{tr}T_L^a\{T_L^b,T_L^c\}\right)\frac{g^2}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \tag{670}$$

従ってこの場合にはゲージアノマリーが消える条件は

$$\mathrm{tr}T_R^a\{T_R^b,T_R^c\} - \mathrm{tr}T_L^a\{T_L^b,T_L^c\} = 0 \tag{671}$$

となる。電弱相互作用の理論などは axial ゲージ理論であるが、ゲージアノマリーはこの条件を満たしている。

# 7 素粒子論

ここまで場の量子論についての一般的な説明をやってきた。ここまで読めば場の量子論における計算のだいたいのものは出来るようになったと思う。この節では具体的な素粒子論の標準モデルへの導入的な説明をする。

[14] この計算で現れるディラック作用素を定義する接続は、$\varphi_{Li}$ 及び $\varphi_{Ri}$ に定義された接続（構造群の生成子は $T_L^a$）から自然に $\varphi_i$ に定義される接続

$$\nabla_L := d + igT_L^a A^a \tag{669}$$

であることに注意。右巻きも同様である。

## 7.1 素粒子論

ここでは素粒子論の概観を説明する。詳しく勉強したい方は素粒子論の教科書を参照されたい。具体的にモデルを見ていく前に素粒子論の登場人物とでもいうべき粒子の種類を上げておく。まず物質の構成要素であるクオークがある。これはフェルミオンで強い相互作用も電弱相互作用もする。次にフェルミオンの中でも強い相互作用をしないフェルミオンをレプトンという。素粒子と呼ばれる粒子でフェルミオンはこのどちらかに分類される。原子核などを構成する陽子や中性子などというものはアップクオーク（$u$ と書く）とダウンクオーク（$d$ と書く）で構成されている。さらにレプトンである電子（$e^-$ と書く）と電子ニュートリノ（$\nu_e$ と書く）が存在する。これら $u, d, e, \nu_e$ をまとめて第一世代と呼ぶ。この世代と呼ばれる構造は 3 世代まである。第二世代はチャームクオーク（$c$ と書く）、ストレンジクオーク（$s$ と書く）、それとレプトンはミューオン（$\mu^-$ と書く）とミューニュートリノ（$\nu_\mu$ と書く）である。第三世代はトップクオーク（$t$ と書く）、ボトムクオーク（$b$ と書く）、レプトンはタウオン（$\tau^-$ と書く）、タウニュートリノ（$\nu_\tau$ と書く）からなる。

$$\begin{array}{lccc} & \text{第一世代} & \text{第二世代} & \text{第三世代} \\ \text{クオーク} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} u \\ d \end{array} & \begin{array}{c} c \\ s \end{array} & \begin{array}{c} t \\ b \end{array} \\ \text{レプトン} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} e^- \\ \nu_e \end{array} & \begin{array}{c} \mu^- \\ \nu_\mu \end{array} & \begin{array}{c} \tau^- \\ \nu_\tau \end{array} \end{array} \tag{672}$$

ひとつの世代についての理論が理解出来れば、残りの世代についてもそのまま成り立つので同様の理解が得られる。従って以下では特に必要がなければ第一世代についてのみ説明することにする。世代構造が必要になった時に残りの世代が登場することになる。

ボソンはゲージ粒子と呼ばれるゲージ場とと Higgs 粒子と呼ばれるスカラー場のみである。ゲージ場についてはこれまで説明してきた。Higgs 場は電弱理論において自発的対称性の破れの引き金となる場である。

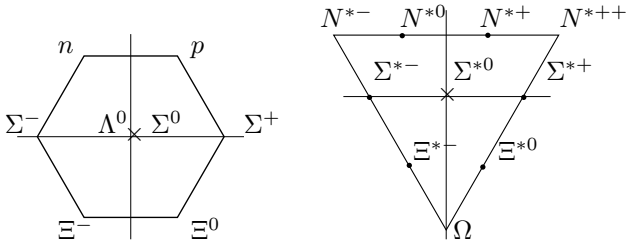
## 7.2 クオークモデル

前節で説明したクオークの種類は flavour（香り）と呼ばれる。これらが複数結合することによりハドロンと呼ばれる複合粒子を形成している。クオークは基本的に単独で観測することは難しく、ハドロンの構造を調べることからその性質が確認できる。ハドロンを形成する基本的な相互作用は強い力である。後に説明するように強い力は構造群が $SU(3)$ の非可換ゲージ理論により記述される。それぞれの flavour のクオークがこの $SU(3)$ の定義表現となっている。強い力を媒介するゲージ粒子はグルーオンと呼ばれる。クオークのこの $SU(3)$ に対する自由度は colour（カラー、色）と呼ばれる。強い力を特徴付ける charge を colour charge（カラー電荷）と呼ぶ。ちょうど自然界の光の三原色 (R,G,B) との類似からそう呼ばれている。強い力は近距離（高エネルギー）では無視できるほどに弱くなり、距離が離れる（低エネルギー）ほど強くなるという性質（漸近自由性）がある。強い力のこの性質のために colour の閉じ込めという現象が起きる。これは colour charge を持ったクオークが単独では観測できずに、観測されるものは必ず $SU(3)$ の singlet だけに限られるという現象である。言い換えれば白色状態のものだけが観測される。colour の閉じ込めがなぜ起こるかということに対する明確な理解はまだ得られていないようである。ただ現象論的にそうであるということを認めることにする。付録にも書いているように $SU(3)$ の singlet を構成するには、クオーク 3 つのテンソル積か、もしくはクオークと反クオークとのテンソル積でのみ作ることが出来る。従って観測されるハドロンはそれらによって全て尽くされる。クオーク 3 つによって構成されるハドロンをバリオンという。クオークと反クオークによって構成されるハドロンはメソンと呼ばれる。

次にクオークモデルの対称性について説明する。アップとダウンとストレンジの質量（それぞれ $\sim$ 4Mev、$\sim$ 7Mev、$\sim$ 130Mev）は QCD の典型的なエネルギースケール（$\sim$ 1Gev）と比べ小さいと見なせるために近似的にこれらは

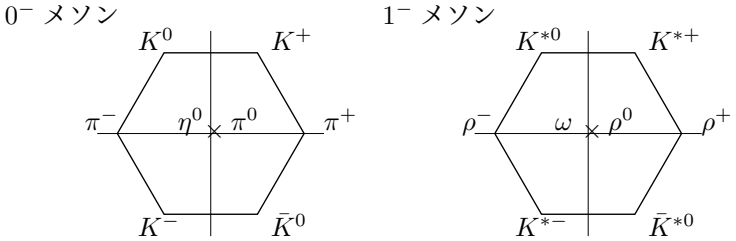
質量を無視して扱うことが出来る[15]。これは言い換えれば、近似的に $u, d, s$ の 3 つのクオークが大域的な $SU(3)$ の対称性を持っていることを意味している。従って colour の自由度に対しては singlet であるが、flavour に対しては $u, d, s$ の 3 つの組み合わせでバリオンが形成され、$q, \bar{q}$ $(q = u, d, s)$ によってメソンが形成されることになる。

クオーク 3 つからなる既約表現は付録で説明したように singlet と octet と decuplet である。対応するバリオンは以下の図のようになる。




（電磁相互作用の）電荷は陽子 $p$ が $+1$、中性子 $n$ が 0 であることと、陽子がアップが 2 つとダウンが 1 つ、中性子がアップが 1 つとダウンが 2 つであるので、アップが $Q = \frac{2}{3}$、ダウンが $Q = -\frac{1}{3}$ であることがわかる。同様に他のバリオンの電荷の関係からストレンジは $Q = -\frac{1}{3}$ である。一般に前節の世代の構造に対応させてアップと同じ行のクオークは $Q = \frac{2}{3}$ であり、ダウンと同じ行のクオークは $Q = -\frac{1}{3}$ である。

クオークと反クオークからなるメソンは octet を形成する。メソンはクオークと反クオークのスピンの向きが反対向きであるか同じであるかで擬スカラーメソン（$0^-$ メソン）、ベクトルメソン（$1^-$ メソン）と呼ばれる。対応する図は




である。

## 7.3 電弱相互作用

ここでは電弱相互作用についての説明を簡単にする。電弱相互作用の理論（電弱理論）は別名 Glashow-Weinberg-Salam 理論とも呼ばれる。電弱理論はこれまで説明した非可換ゲージ理論でのフェルミオンと大きく異なる点がある。それは前節で触れたように左巻きと右巻きフェルミオンの非対称性である。そこで具体的に電弱理論の説明に入る。構造群は $SU(2)_L \times U(1)$ である。ここで $SU(2)_L$ の意味は左巻きフェルミオン（及び Higgs 粒子）に対してだけ $SU(2)$ が作用するということである。右巻きフェルミオンに対しては $SU(2)$ は作用しない。言い換えれば右巻きフェルミオンは $SU(2)$ の singlet 表現である。次節で具体的に見ていく。

### 7.3.1 レプトン

ここではまずレプトンの表現を説明する。前節でも説明した通りにひとつの世代について理解出来れば十分である。従ってここでは第一世代について説明する。$SU(2)_L \times U(1)$ の接続形式は

$$i\left(gT^a W_\mu^a + \acute{g} S B_\mu\right) \tag{673}$$

[15]チャーム以下のクオークは 1Gev 以上なので無視して扱えない。

で与えられる。ここで $T^a$ は $SU(2)$ の生成子であり、$S$ は $U(1)$ の生成子である。従って $a = 1, 2, 3$ である。

左巻きレプトンと右巻きレプトンは $SU(2)$ の表現として書くと

$$l_L := \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, \quad e_R^- \text{（ニュートリノは右巻きがない）} \tag{674}$$

である。つまり電子 $e_L^-$ とニュートリノ $\nu_{eL}^-$ が $SU(2)$ の表現としてひとまとめに表される。$SU(2)$ の生成子は

$$T_L^a = \frac{\sigma^a}{2}, \qquad T_R^a = 0 \tag{675}$$

である。ここに $\sigma^a$ はパウリ行列である。また $U(1)$ のほうは

$$S_L = -\frac{1}{2}, \quad S_R = -1 \tag{676}$$

で与えられる。ここで $S$ のこのような選び方は後の記述を慣習に合わせるためであり、こうである必要はない。以上により接続形式（左巻き）をあらわに書くと

$$\frac{ig}{2}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} - \frac{i\acute{g}}{2}B_\mu \tag{677}$$

中性カレント（対角成分）は

$$\begin{aligned} & gT^3W_\mu^3 + \acute{g}SB_\mu \\ = \quad & A_\mu(g\sin\theta T^3 + \acute{g}\cos\theta S) + Z_\mu(g\cos\theta T^3 - \acute{g}\sin\theta S) \end{aligned} \tag{678}$$

と書ける。ここで

$$A_\mu = \sin\theta W_\mu^3 + \cos\theta B_\mu \tag{679}$$

$$Z_\mu = \cos\theta W_\mu^3 - \sin\theta B_\mu \tag{680}$$

である。後に説明するが、Higgs 場が自発的対称性の破れを起こし、ゴールドストーン粒子が $Z_\mu$ と結合し、この $Z_\mu$ が質量を持つ。一方 $A_\mu$ は 0 質量のままとなる。このとき $A_\mu$ を QED の電磁場とみなすのである。$Z_\mu$ は Z ボソンと呼ばれる。

$$e := g\sin\theta = \acute{g}\cos\theta \tag{681}$$

（$\theta$ をこうなるように選ぶ）と置き、

$$Q = T^3 + S = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & : \text{for left} \\ -1 & : \text{for right} \end{cases} \tag{682}$$

と置けば

$$(678) = eQA_\mu + \frac{e}{\sin\theta\cos\theta}(T^3 - \sin^2\theta Q)Z_\mu \tag{683}$$

と書ける。第一項目はまさに QED の電磁場に相当している。まとめると接続形式は

$$\frac{ie}{2\sin\theta}(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-) + ieQA_\mu + ig_zZ_\mu \tag{684}$$

ここで

$$W_\mu^+ = W_\mu^1 - iW_\mu^2, \quad W_\mu^- = W_\mu^1 + iW_\mu^2 \tag{685}$$

及び

$$T^+ = T^1 + iT^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^- = T^1 - iT^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{686}$$

であり、

$$\begin{aligned} g_z &= \frac{e}{\sin\theta\cos\theta}(T^3 - \sin^2\theta Q) \\ &= \begin{cases} \frac{e}{\sin\theta\cos\theta}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \sin^2\theta \end{pmatrix} & : \text{for left} \\ e\tan\theta & : \text{for right} \end{cases} \end{aligned} \tag{687}$$

と置いた。

### 7.3.2 クオーク

第一世代のクオークはアップクオーク $u$ とダウンクオーク $d$ がある。これらが $SU(2)_L$ の表現をなす。これを

$$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \tag{688}$$

と書く。右巻きクオークはともに $SU(2)_L$ が作用しない。即ち singlet である。これらを

$$u_R, \quad d_R \tag{689}$$

と書く。$SU(2)$ の生成子はレプトンの場合と同じで

$$T_L^a = \frac{\sigma^a}{2}, \qquad T_R^a = 0 \tag{690}$$

である。アップクオークの電荷は $\frac{2}{3}$、ダウンクオークの電荷は $-\frac{1}{3}$ であること、及び $Q = T^3 + S$ を考慮すれば、左巻きクオーク、右巻きクオークそれぞれに対して

$$S_L = \frac{1}{6}, \qquad S_R = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{691}$$

である。電荷 $Q$ は右巻きも左巻きも

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{692}$$

である。また $g_z$ は

$$\begin{aligned} g_z &= \frac{e}{\sin\theta\cos\theta}(T^3 - \sin^2 Q) \\ &= \begin{cases} \frac{e}{\sin\theta\cos\theta}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix} & : \text{for left} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e\tan\theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}e\tan\theta \end{pmatrix} & : \text{for right} \end{cases} \end{aligned} \tag{693}$$

となる。

### 7.3.3 Higgs 場

Higgs 場は $SU(2)$ の二重項（doublet）

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{694}$$

で与えられる。$SU(2)$ と $U(1)$ の生成子は

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2}, \quad S = \frac{1}{2} \tag{695}$$

で与えられる。

ポテンシャルは例えば「ゴールドストーンの定理」の節の例で与えたポテンシャル (287) である。従って Higgs 粒子は真空期待値 $\lambda$ を持ち、自発的対称性の破れを起こす。そこで

$$\phi = \acute{\phi} + \eta, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{696}$$

と置く。$\lambda$ がこの形でない場合にも適当に基底を取り直すことによってこの形に出来る。対称性は $SU(2) \times U(1)$ から部分群 $U(1)$ に落ちている。即ち $T^1, T^2$ の方向、及び対角成分の $2, 2$ 成分が $0$ でないものに対する対称性が敗れていることになる。保たれている方の $U(1)$ の生成子は

$$Q = T^3 + S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{697}$$

である。これまでと同じように形を揃えれば

$$g_z = \frac{e}{\sin\theta\cos\theta} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sin^2\theta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{698}$$

となる。

次に Higgs 場のラグランジアンに含まれる $-(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)$ の項から、Higgs 場が真空期待値を持った後では

$$-\eta^\dagger \left[\frac{e}{\sin\theta} T^a W^a_\mu + \frac{e}{\cos\theta} S B_\mu\right] \times \left[\frac{e}{\sin\theta} T^a W^{a\mu} + \frac{e}{\cos\theta} S B^\mu\right] \eta \tag{699}$$

という項が生じる。これはゲージ場の二次式なので、ゲージ場の質量項になる。具体的に計算すれば、$Z$ ボソンは

$$-(g_z\eta)^\dagger(g_z\eta) Z_\mu Z^\mu = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^2v^2}{4\sin^2\theta\cos^2\theta}\right] Z_\mu Z^\mu \tag{700}$$

となる。即ち

$$M_Z = \frac{ev}{2\sin\theta\cos\theta} \tag{701}$$

である。同様に $W$ ボソンについては

$$-\left(\frac{e}{2\sin\theta} T^+\eta\right)^\dagger \left(\frac{e}{2\sin\theta} T^+\eta\right) W^{+\dagger}_\mu W^{+\mu} = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^2v^2}{4\sin^2\theta}\right]\left[W^1_\mu W^{1\mu} + W^2_\mu W^{2\mu}\right] \tag{702}$$

よって

$$M_W = \frac{ev}{2\sin\theta} = M_Z\cos\theta \tag{703}$$

となる。電磁場は $Q\lambda = 0$ より質量が 0 のままである。以上のように Higgs 場が自発的に対称性を破ることにより、破られた対称性に対応するゲージ場に質量を与える機構を Higgs 機構（Higgs mechanism）という。

ここで $-(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)$ から生じる他の項を見てみる。ゲージ場をまとめて $A^a_\mu$ で表し、生成子を $T^a$ と書いておくと

$$i\eta^\dagger T^a A^a_\mu(\partial_\mu\acute{\phi}) - i(\partial_\mu\acute{\phi}^\dagger)T^a\eta A^{a\mu} \tag{704}$$

なる項が生じる。

$$\begin{aligned}(\partial_\mu\acute{\phi}^\dagger)T^a\eta A^{a\mu} &= \partial_\mu\acute{\phi}^\dagger\cdot(g_z\eta Z^\mu + \frac{e}{2\sin\theta}T^+\eta W^{+\mu}) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\mu\acute{\phi}_1^\dagger & \partial_\mu\acute{\phi}_2^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{ev}{2\sqrt{2}\sin\theta}W^{+\mu} \\ \frac{-ev}{2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta}Z^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{ev}{2\sqrt{2}\sin\theta}(\partial_\mu\acute{\phi}_1^\dagger)W^{+\mu} - \frac{ev}{2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta}(\partial_\mu\acute{\phi}_2^\dagger)Z^\mu \end{aligned} \tag{705}$$

となるので、$\acute{\phi}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_i + ib_i)$ と置けば

$$i\eta^\dagger T^a A^a_\mu(\partial_\mu\acute{\phi}) - i(\partial_\mu\acute{\phi}^\dagger)T^a\eta A^{a\mu} = M_W(W^{1\mu}\partial_\mu b_1 - W^{2\mu}\partial_\mu a_1) - M_Z Z^\mu\partial_\mu b_2 \tag{706}$$

となる。ここで現れた $a_1, b_1, b_2$ は「ゴールドストーンの定理」の節によれば、ゴールドストーン粒子である。これからゴールドストーン粒子は質量を持つことになったゲージ場と結合しているのが分かる。ラグランジアンは全体としてゲージ場の質量項を除いてゲージ対称性を持っている。ゲージ変換を適切に行うことによって、質量項から生じる変化分とこの項とがちょうど打ち消すようにすることが出来るのが分かる。具体的には

$$\begin{aligned} &W^1_\mu \to W^1_\mu + \frac{1}{M_W}\partial_\mu b_1, \quad W^2_\mu \to W^2_\mu - \frac{1}{M_W}\partial_\mu a_1 \\ &Z_\mu \to Z_\mu - \frac{1}{M_Z}\partial_\mu b_2 \end{aligned} \tag{707}$$

なる変換である。即ち実質的にゴールドストーン粒子はゲージ場に完全に取り込まれてしまう。同時にラグランジアンにある $-(\partial_\mu\acute{\phi}^\dagger)(\partial_\mu\acute{\phi})$ のゴールドストーン粒子の部分が相殺される。従って実際にゴールドストーン粒子は物理的な場ではないことが分かる。二次以上の相互作用項にもゴールドストーン粒子が残っているが、これは次のようにして消去できる。まず汎関数積分に挿入していたデルタ汎関数には $F^\mu A^a_\mu - B^a$ を入れていたが、ゲージ場が質量を持つ場合には $B^a$ を入れる必要がない。これを入れていたのはゲージ固定条件を反映させるためであったが、ゲージ場が質量を持つ場合にはゲージ対称性を持たないのでゲージ固定する必要がないからである。従って汎関数積分は

$$Z(J^{a\mu}) = \int [dA^a_\mu]\delta(F^\mu A^a_\mu)e^{i\int\mathcal{L}(A^a)} \tag{708}$$

となる。上記ゲージ変換のもと、デルタ汎関数の中身は $F^\mu(A^a_\mu + \delta A^a_\mu)$ の形に変換するので、それがそのままゴールドストーン場の満たすべき条件式となる。具体的にはこれまで同様に $F^\mu = \partial^\mu$ と取って

$$\begin{aligned} &\partial^2 b_1 = -M_W\partial_\mu W^{1\mu}, \quad \partial^2 a_1 = M_W\partial_\mu W^{2\mu} \\ &\partial^2 b_2 = M_Z\partial_\mu Z^\mu \end{aligned} \tag{709}$$

となる。これらの式を用いてゴールドストーン場を消去することが出来る。

こうして理論にはゴールドストーン粒子は現れない。その代わり、ゲージ場にゴールドストーン粒子が取り込まれた分だけゲージ場の自由度が増えることになる。ゲージ場の縦波成分が物理的自由度として現れてくる。結果、質量を持つゲージ場は自由度が横波成分だけだった時の 2 つから、3 つになる。これらの事実まで含めて通常 Higgs mechanism と呼ばれる。また証明は省くがこのように自発的に対称性の敗れた後でも理論の繰り込み可能性は壊れないことが知られている。

### 7.3.4 湯川相互作用

これまでのフェルミオンと Higgs 場との相互作用項（湯川相互作用）は以下で与えられる。レプトンと Higgs 場との相互作用は

$$-f_l \bar{e}_R^- \cdot \phi^\dagger l_l - f_l \bar{l}_l \phi \cdot e_R^- \tag{710}$$

である。クオークと Higgs 場との相互作用は

$$\begin{aligned} &-f_d \bar{d}_R \cdot \phi^\dagger q_L - f_d \bar{q}_L \cdot \phi d_R \\ &-f_u \bar{u}_R \cdot \tilde{\phi}^\dagger q_L - f_u \bar{q}_L \cdot \tilde{\phi} u_R \end{aligned} \tag{711}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \varepsilon \phi^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} \phi_2^\dagger \\ -\phi_1^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{712}$$

である。フェルミオンの質量は Higgs 場が真空期待値を持つことにより、これら湯川相互作用から生じる。従って計算すれば

$$m_e = \frac{f_l v}{\sqrt{2}}, \quad m_u = \frac{f_u v}{\sqrt{2}}, \quad m_d = \frac{f_d v}{\sqrt{2}} \tag{713}$$

となる。

### 7.3.5 フェルミ相互作用

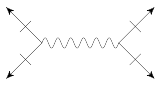
低エネルギーでの有効理論としてのフェルミ相互作用を説明する。フェルミオンとゲージ場との相互作用項、ここではレプトンを例に出してみてみる。レプトンと荷電カレント（$W_\mu^+, W_\mu^-$）との相互作用項は

$$-\frac{e}{2\sin\theta}\left[\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu W_\mu^+ e_L^- + \bar{e}_L^- \gamma^\mu W_\mu^- \nu_{eL}\right] \tag{714}$$

であり、左巻きレプトンと中性カレント（$A_\mu, Z_\mu$）との相互作用項は

$$\begin{aligned} & e\bar{e}_L^- \gamma^\mu A_\mu e_L^- - \frac{e}{2\sin\theta\cos\theta}\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu Z_\mu \nu_{eL} - \left(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta\right)\frac{e}{\sin\theta\cos\theta}\bar{e}_L^- \gamma^\mu Z_\mu e_L^- \\ = \;& e\bar{e}_L^- \gamma^\mu A_\mu e_L^- - \frac{e}{2\sin\theta\cos\theta}\bar{l}_L \gamma^\mu Z_\mu (T^3 - \sin^2\theta Q) l_L \end{aligned} \tag{715}$$

となる。ここで次の振幅を考える。



(716)

ここでゲージ場のプロパゲータは質量を持つゲージ場によるものであるとする。ゲージ場のプロパゲータから $\frac{1}{p^2+M^2}$ のような factor が出てくる。低エネルギーでは $\sim \frac{1}{M^2}$ となる。従って低エネルギーでは有効相互作用

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}(J^{1\mu}J_\mu^1 + J^{2\mu}J_\mu^2) \tag{717}$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}(J^{3\mu} - 2\sin^2\theta J_{em}^\mu)(J_\mu^3 - 2\sin^2\theta J_{em\mu}) \tag{718}$$

（1 段目が荷電カレント、2 段目が中性カレント）で計算した結果と等しくなる。ここで

$$G_F = \frac{\sqrt{2}e^2}{8M_W^2 \sin^2\theta} \tag{719}$$

$$J^{a\mu} = \bar{l}_L T^a \gamma^\mu l_L \tag{720}$$

$$j^\mu_{em} = \bar{l}_L Q \gamma^\mu l_L \tag{721}$$

である。この有効相互作用はフェルミ相互作用と呼ばれる。

上で与えたフェルミ相互作用は次元換算すれば分かるように繰り込み不可能な相互作用である。このように有効理論においては必ずしも繰り込み可能な相互作用ばかりとは限らない。しかしこのような繰り込み不可能な相互作用項の結合定数はエネルギーの負のベキの次元を持っている。従ってさらに低エネルギーではこのような相互作用は無視できるようになる。一般にあるエネルギースケールにおいて有効理論が与えられた時、その”もと”となる理論が十分高エネルギーにおいて成り立っている場合には、このような有効相互作用として得られた繰り込み不可能な相互作用は無視できるようになり、結果として有効理論は繰り込み可能になると考えられる。電弱理論や QCD などはこのようにかなりの高エネルギーで成立している理論の有効理論であると考えれば、繰り込み可能であるのが自然なのである。

### 7.3.6 ゲージアノマリー

アノマリーの節で説明したようにゲージ対称性がカイラル対称性である場合に、ゲージアノマリーがあっては繰り込み可能性が崩れてしまう。ここでは電弱理論のゲージアノマリーを計算しよう。条件は

$$\mathrm{tr}T_R^a\{T_R^b, T_R^c\} - \mathrm{tr}T_L^a\{T_L^b, T_L^c\} = 0 \tag{722}$$

であった。右巻きのものを先に計算すると、全てのフェルミオンに対して $T_R^a = 0$ であるので $S_R$ だけを計算すればよい。

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}S_R\{S_R, S_R\} = 2\mathrm{tr}S_R^3 &= 2\left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 3\right) \\ &= -\frac{4}{9} \end{aligned} \tag{723}$$

となる[16]。次に左巻きのものを計算する。$T_L^a = \frac{\sigma^a}{2}$ に関しては

$$\mathrm{tr}T_L^a\{T_L^b, T_L^c\} = \frac{\delta^{ab}}{2}\mathrm{tr}T_L^a = 0 \tag{724}$$

及び

$$\mathrm{tr}S\{S, T^a\} = \mathrm{tr}T^a\{S, S\} \propto \mathrm{tr}T^a = 0 \tag{725}$$

であるので、$T_L^a$ が 3 つのものと 1 つのものは消える。まずは $S_L$ が 3 つのものは

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}S_L\{S_L, S_L\} = 2\mathrm{tr}S_L^3 &= 2\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 6\right) \\ &= -\frac{4}{9} \end{aligned} \tag{726}$$

[16]念のために説明しておくと、計算はレプトン、アップクオーク、ダウンクオークそれぞれに対する $\mathrm{tr}S_L\{S_L, S_L\}$ の和を取ればよい。またクオークには colour の自由度が 3 つあることも考慮する必要がある。

これは上で計算した左巻きのものとちょうど相殺する。残りは $S_L$ が 1 つのものであるが、これは

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}S_L\{T_L^a, T_L^b\} = \mathrm{tr}T_L^a\{S_L, T_L^b\} = \mathrm{tr}T_L^a\{T_L^b, S_L\} &= \frac{\delta^{ab}}{2}\mathrm{tr}S_L \\ &= \frac{\delta^{ab}}{2}\left(-1 + \frac{1}{3}\times 3\right) = 0 \end{aligned} \tag{727}$$

となり、これも消える。以上で電弱理論のゲージアノマリーは全て消えることが示せた。

### 7.3.7 世代構造

これまでは 1 世代のみについて説明してきた。ここでは簡単に世代間の mixing について説明。フェルミオンの $SU(2)$ の表現は

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \tag{728}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix} \tag{729}$$

である。右巻きは全て singlet である。世代の添え字を $i = 1, 2, 3$ で表せばまとめて

$$l_L^i = \begin{pmatrix} \nu_{eL}^i \\ e_L^i \end{pmatrix}, \quad e_R^i \tag{730}$$

$$q_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix}, \quad u_R^i, \quad d_R^i \tag{731}$$

と書ける。基本的構造はこれまで説明した通りである。事情が異なってくるのは湯川相互作用のところである。書き出すと

$$\text{lepton} \quad \rightarrow \quad -f_{ij}\bar{e}_R^i \phi^\dagger l_L^i + \text{h.c} \tag{732}$$

$$\text{down quark} \quad \rightarrow \quad -g_{ij}\bar{d}_R^i \phi^\dagger q_L^i + \text{h.c} \tag{733}$$

$$\text{up quark} \quad \rightarrow \quad -h_{ij}\bar{u}_R^i \tilde{\phi}^\dagger q_L^i + \text{h.c} \tag{734}$$

ここで h.c はエルミート共役の意味である。これらから Higgs 機構により質量項が生じる。各フェルミオンの質量はこれらを対角化する表現をとって得られる。この時、一般にゲージの固有状態（ゲージ場との相互作用項を対角化した表現）と質量の固有状態（質量項を対角化する表現）とは異なる。即ち、通常通りにゲージの固有状態で表示すれば質量項に非対角成分が生じる。即ち世代間の mixing が生じる。レプトンに関しては、電子の質量項を対角化した時、ニュートリノの質量がないため、それを新しくゲージ固有状態と再定義してやれば、世代間の mixing はないことが分かる。2 世代で同じように mixing を考えた時、mixing の度合いを表すパラメータが定義されるが、それを Cabbibo angle という。ここで考えた 3 世代の場合には、このようにして得られた質量行列を Cabbibo-Kobayashi-Masukawa 質量行列（CKM mass matrix）という。ここではこれ以上詳しく述べることはしない。

## 7.4 量子色力学

強い力の基本的構造は $SU(3)$ 非可換ゲージ理論によって記述される。強い力はグルーオンと呼ばれる、$SU(3)$ ゲージ理論のゲージ場のやり取りを行うことによって働く。フェルミオンではクオークが colour 電荷を持つため、強い力が働く。強い力の基本的な性質である漸近自由性、即ち高エネルギー（近距離）では相互作用が弱くなり、低

エネルギー（遠距離）では相互作用が強くなるという性質のため、クオークの間にとても強い力が働き、クオーク単体では観測されないと考えられる。実験により観測されるこのクオークの閉じ込めの機構についてはまだ正確なところは分かっていない。しかし、それを示唆する理論的な結果はいくつかある。ここではそれを認めることにし、クオークがいくつか結合することによって colour 電荷を持たない状態、即ち colour singlet である状態のみが観測されると仮定する。colour singlet はクオークを $q_i$、反クオークを $\bar{q}_i$ で表すと（$i = 1, 2, 3$ は colour の自由度）

$$q_i\bar{q}_j, \quad \varepsilon^{ijk}q_iq_jq_k, \quad \varepsilon^{ijk}\bar{q}_i\bar{q}_j\bar{q}_k \tag{735}$$

などのように、ヤング図の許すだけの $SU(3)$ の singlet である。クオークには flavour があるので、これらの singlet をさまざまな flavour の組み合わせによって作ることが出来る。量子論的には例えばクオークの生成演算子、及び反クオークの生成演算子によって上記クオークの singlet の状態を構成することが出来る。まず例えば 3 つのクオークの生成演算子の積を用意する。そして演算子の運動量やスピンなどの位置はそのままにしておいて、flavour にだけヤング対称子を作用させて多重項を構成すればよい。colour に対しては singlet を組む。あとはそれを真空状態へかければ一応は求める状態が得られる。他の組み合わせも同様である。しかしこれは摂動論的な構成法である。従って強い力が弱くなる高エネルギーにおいてのみ有効な構成法である。強い力が強くなる領域においてはこのような摂動論的な方法が有効ではないと思われる。強い力に対する理解は、低エネルギーにおいて相互作用が強くなるために摂動論が使えなくなるという事実により、純粋に $SU(3)$ ゲージ理論の frame work では非常に得られにくい。強い力の低エネルギーでの性質を知るためには非摂動論的な方法が必要になってくる。有効理論の枠組みではそれでもさまざまなことがいえるのだが、ここではそれらに対して触れない。

とりあえず、量子色力学（QCD）についての $SU(3)$ ゲージ理論による理解はこれまでの説明によってほぼ尽くされているといってもよい。あえて言うならば、演算子積展開、スケーリング則やパートンモデルの説明、格子 QCD などであろうがここではこれらは説明しない。ここでは QCD に必要な条件である漸近自由性が $SU(3)$ 非可換ゲージ理論で実際に成り立っていることを見てみる。非可換ゲージ理論の結合定数の繰り込み群方程式は

$$\mu\frac{dg}{d\mu} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}C - \frac{4}{3}n_f\right) \tag{736}$$

であった。ここで $n_f$ は $SU(3)$ の作用するフェルミオンの数、即ち flavour の数でる。また $C$ は

$$f^{acd}f^{bcd} = C\delta^{ab} \tag{737}$$

であった。一般に $SU(N)$ の場合、規格化条件を $\mathrm{tr}T^aT^b = \delta^{ab}$ と取った時には $C = 2N$ である。従って $n_f \leq 16$ であれば漸近自由性を持つことが分かる。3 世代含めても flavour は 6 つなのでこの条件を満たしている。

# A　プロパゲータの積分の計算

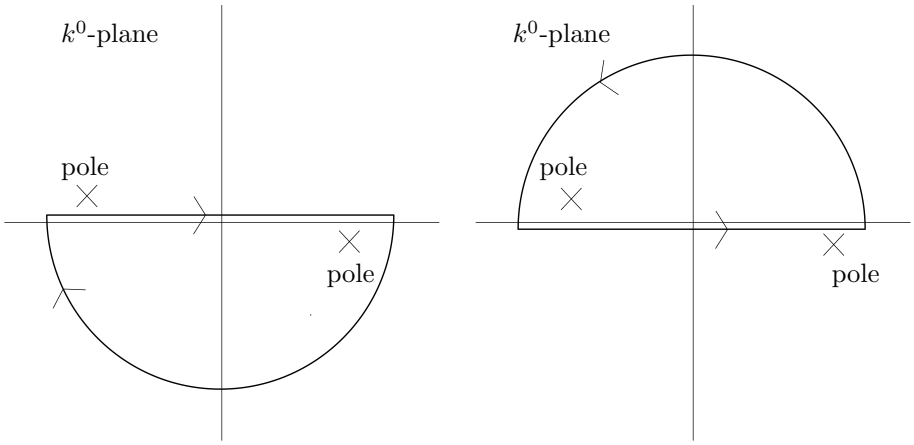
プロパゲータの一般的な形

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon}F(k) \tag{738}$$

について。これは

$$\Delta_F(x) \quad = \quad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{i(\mathbf{kx} - k^0x^0)}}{(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2 - i\varepsilon} - k^0)(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2 - i\varepsilon} + k^0)}F(k) \tag{739}$$

これを $k^0$ で積分するには、$k^0$ を複素平面上での積分にすればよい（下図）。




$x^0 > 0$ の場合には図の左側のように取ればよい。$k^0$ の積分路を図の左側のように取ることにより、複素平面上の下半分の積分は半円の半径を $\to \infty$ の極限を取ることにより、0 になる。積分路に囲まれる pole は $\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2 - i\varepsilon}$ である。また $x^0 < 0$ の場合には図の右側のような積分路を取ればよい。この場合には積分路に囲まれる pole は $-\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2 - i\varepsilon}$ である。まず、$x^0 > 0$ の場合に複素積分をすれば

$$\Delta_F(x) = i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ikx}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} F(k) \quad (k = (\mathbf{k}, \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})) \tag{740}$$

$x^0 < 0$ の場合には

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ikx}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} F(\mathbf{k}, -\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}) \\ &= i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ikx}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} F(-k) \quad (k = (\mathbf{k}, \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})) \end{aligned} \tag{741}$$

従ってまとめて書けば

$$\Delta_F(x) = i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \Big( \theta(x^0) e^{ikx} F(k) + \theta(-x^0) e^{-ikx} F(-k) \Big) \tag{742}$$

# B　フェルミオンがある場合の便利な公式

フェルミオンがある場合の計算のためにここで便利な公式を上げておく。また次元正則化をし $n$ 次元で考えるので $n$ 次元の場合の一般的な場合で書いておく。”クリフォード代数”note を参照すれば一般的な $n$ 次元の場合のフェルミオンも容易に理解出来ると思うが、ここでの計算に必要なのはクリフォード代数の関係式 (308) のみである。一応注意しておくが、Euclid 時空で計算する時は $\eta^{\mu\nu}$ の代わりに $\delta^{\mu\nu}$ で置き換えればよい。

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = -n \tag{743}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = (n-2)\gamma^\nu \tag{744}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho} - (n-4)\gamma^\nu \gamma^\rho \tag{745}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = 2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + (n-4)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \tag{746}$$

$\gamma$ 行列のトレースの計算

$$\mathrm{tr}1 = n \tag{747}$$

$$\mathrm{tr}\gamma^\mu \gamma^\nu = -n\eta^{\mu\nu} \tag{748}$$

一般に $m$ が偶数の時、

$$\mathrm{tr}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_m} = (-1)^{\frac{m}{2}} n \sum_{\pi} \varepsilon_\pi \eta^{\mu_{\pi_1}\mu_{\pi_2}}\eta^{\mu_{\pi_3}\mu_{\pi_4}}\cdots\eta^{\mu_{\pi_{m-1}}\mu_{\pi_m}} \tag{749}$$

ここで $\pi$ は $1,2,\cdots,m$ を 2 つずつのペアにする組み合わせであり、$\pi_{2i-1} < \pi_{2i}$ で、和は全てのそのような組み合わせ（重複なし）にわたる。$\varepsilon_\pi$ は $1,2,\cdots,m$ から $\pi_1,\cdots,\pi_m,\ (\pi_{2i-1} < \pi_{2i})$ への置換が遇置換ならば $+1$ で、奇置換ならば $-1$ である。また $m$ が奇数の場合には 0 となる。特に

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\gamma^5\gamma^\mu = \mathrm{tr}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu = \mathrm{tr}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = 0 \\
&\mathrm{tr}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = -in\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{750}$$

である。

# C　$SU(N)$

## C.1　固有値について

ゲージ対称性やクオークモデルの理解などで $SU(N)$ についての知識が多少必要なので、ここで補足的に説明しておく。$SU(N)$ は $N$ 次元ベクトル空間 $V$ の内積を不変にする群の内、行列式が 1 となるもの全体からなる集合（群をなす）として定義される。$SU(N)$ の元を $U = e^{iA}$ と書くと

$$UU^\dagger = 1 \tag{751}$$

$$\det U = e^{i\mathrm{tr}A} = 1 \tag{752}$$

より[17]

$$A^\dagger = A \tag{756}$$

$$\mathrm{tr}A = 0 \tag{757}$$

と書ける。従って $\mathfrak{su}(N)$ の元は (756)、(757) の条件を満たす $N \times N$ 行列全体からなるベクトル空間である。容易に分かるように、そのような行列で線形独立なものは $N^2-1$ 個とれる。従って $\mathfrak{su}(N)$ は $N^2-1$ 次元ベクトル空間である。さらに同時対角化出来る生成子の最大の数は (757) より $N-1$ 個存在することが分かる。それらを $H_i\ (i = 1,2,\cdots,N-1)$ と書くことにする。

$H_i\ (i = 1,\cdots,N-1)$ の同時固有ベクトルを基底として選び、それを $v_n\ (n = 1,2,\cdots,N)$ と書く。また $v_n$ の $H_i$ に属する固有値を $\mu_i^n$ と書く。即ち

$$H_i v_n = \mu_i^n v_n \tag{758}$$

[17]”ゲージ理論”note の付録でも説明したが、ここでも念のため (752) の証明を与えておく。$t$ を実数とし、$\det e^{tA}$ の差分を取ると

$$\begin{aligned}
\det e^{(t+\Delta t)A} - \det e^{tA} &= (\det e^{\Delta tA} - 1)\det e^{tA} \\
&= \Delta t(\mathrm{tr}A + \mathcal{O}(\Delta t))\det e^{tA}
\end{aligned} \tag{753}$$

よって、これを $\Delta t$ で割り、$\Delta t \to 0$ の極限を取れば、微分方程式

$$\frac{d}{dt}\det e^{tA} = \mathrm{tr}A \det e^{tA} \tag{754}$$

が得られる。よって

$$\det e^{tA} = e^{t\mathrm{tr}A} \tag{755}$$

となる。特に $t = 1$ と置けば、(752) が示される。

$H_i$ は対角化されているため、条件 (756) より固有値 $\mu_i^n$ は実数となる。この基底による表示のもと $H_i$ は

$$H_i = \begin{pmatrix} \mu_i^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_i^N \end{pmatrix} \tag{759}$$

と書ける。

次に固有ベクトル $v_n$ の固有値の組 $(\mu_1^n, \mu_2^n, \cdots, \mu_{N-1}^n)$ を実 $N-1$ 次元ベクトル空間の点 $\mathbf{x}^n = (\mu_1^n, \mu_2^n, \cdots, \mu_{N-1}^n)$ とみなし、$v_n$ と $\mathbf{x}^n$ を対応させる。この時条件 (757) より

$$\mathrm{tr} H_i = \sum_n \mu_i^n = 0 \tag{760}$$

ベクトル $\mathbf{x}^n$ を使って表せば

$$\sum_n \mathbf{x}^n = 0 \tag{761}$$

を満たしていることが分かる。これは実 $N-1$ 次元ベクトル空間内の $N$ 個の点 $\mathbf{x}^1, \cdots, \mathbf{x}^N$ の重心に原点 0 が来ることを意味している。

さらに $H_i$ $(i = 1, \cdots, N-1)$ が一次独立である条件について。もし一次従属であれば実 $N-1$ 次元ベクトル空間内のある $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_{N-1})$ が存在し

$$\sum_i a_i H_i = 0 \tag{762}$$

これは (759) より、全ての $\mathbf{x}^n$ に対して

$$\mathbf{a}\mathbf{x}^n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{763}$$

を意味している。この条件は $\mathbf{x}^n$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ が $\mathbf{a}$ に垂直な $N-2$ 次元の平面内に存在することを意味している。従って $H_i$ が一次独立であるためには $\mathbf{x}^n$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ が全部で $N-1$ 次元ベクトル空間を張る必要がある。

逆に $\mathbf{x}^n$ の重心が原点にきていて、それらが $N-1$ 次元ベクトル空間を張るのであれば、対応する $H_i$ は同時対角化された生成子として用いることが出来る。

次に上昇下降演算子を定義する。上昇下降演算子は $n \neq m$ として $n$ 行 $m$ 列が 1 で他は全て 0 の行列

$$E_{nm} := n \begin{pmatrix} & \overset{m}{\vdots} & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \tag{764}$$

で定義される。このような行列は全部で $N(N-1)$ 個存在する。上昇下降演算子の名前の由来は $H_i$ の固有ベクトル $v_m$ を $v_n$ へ移すからである。$v_m$ 以外の固有ベクトルは 0 へ移される。即ち

$$E_{nm} v_m = v_n, \quad E_{nm} v_r = 0 \ \ (r \neq m) \tag{765}$$

この上昇下降演算子を用いて、残りの $\mathfrak{su}(N)$ の基底は、$n > m$ として

$$A_{nm} = E_{nm} + E_{mn} \tag{766}$$

$$B_{nm} = iE_{nm} - iE_{mn} \tag{767}$$

と表される。これらは全部で $N^2 - N$ 個になる。同時対角化された $N-1$ 個の $H_i$ と合わせて全部で $N^2 - 1$ 個になる。

## C.2 代数

次に Lie 代数 $\mathfrak{su}(N)$ のなす代数について。$SU(N)$ の元は $\mathfrak{su}(N)$ の基底 $T^a$（これは前節の $H_i$ や $A_{nm}$ や $B_{nm}$ である）を用いて（$t$ は実数として）

$$U_t = \exp\left(it\alpha^a T^a\right) = \exp\left(it\mathbf{aT}\right) \qquad (\mathbf{aT} = \alpha^a T^a) \tag{768}$$

と書ける。群の要素の積はまたその群の要素であるので $X \in \mathfrak{su}(N)$ として

$$\begin{aligned} U_t^\dagger e^{iT^a} U_t &= e^{iU_t^\dagger T^a U_t} \\ &= e^{iT^a - t[T^a, \mathbf{aT}] + \cdots} \end{aligned} \tag{769}$$

も群 $SU(N)$ の要素。$t$ は任意なので $[T^a, \mathbf{aT}]$ も $\mathfrak{su}(N)$ の元でないといけない。即ち $[T^a, T^b]$ は $T^c$ の線形結合である。従って

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \tag{770}$$

と書ける。$f^{abc}$ を構造因子という。

$\mathfrak{su}(N)$ をベクトル空間として見た時、$T \in \mathfrak{su}(N)$ の成分は $T$ の行列の成分であり、よって $N \times N = N^2$ 次元複素ベクトル空間の部分空間である。従って $T, S \in \mathfrak{su}(N)$ の内積は

$$\sum_{i,j} T^*_{ij} S_{ij} = \mathrm{tr} T^\dagger S = \mathrm{tr} TS \tag{771}$$

と表される。従って $\mathfrak{su}(N)$ の正規直交基底 $T^a$ は

$$\mathrm{tr} T^{a\dagger} T^b = \mathrm{tr} T^a T^b = \delta^{ab} \tag{772}$$

を満たす。

前節で求めた $H_i$ $(i = 1, 2, \cdots, N-1)$ をグラムシュミットの直交化を用いて直交化して規格化したものを $T^a$ $(a = 1, 2, \cdots, N-1)$ と置き、$A_{nm}$、$B_{nm}$ をこのように規格化した $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{nm}$、$\frac{1}{\sqrt{2}}B_{nm}$ をまとめて $T^b$ $(b = N, N+1, \cdots, N^2-1)$ と置けば、これらは実際に $\mathfrak{su}(N)$ の正規直交基底をなす。

(770) に $T^d$ をかけてトレースをとれば

$$\mathrm{tr}([T^a, T^b]T^d) = if^{abd} \tag{773}$$

容易に分かるようにこれは $a, b, d$ について完全反対称である。交換子の有名なヤコビ恒等式

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 \tag{774}$$

を用いれば

$$f^{bce}f^{aed} + f^{cae}f^{bed} + f^{abe}f^{ced} = 0 \tag{775}$$

が得られる。これもヤコビ恒等式と呼ばれる。

次に上記 $U_t$、及び $\mathbf{T} = (T^1, T^2, \cdots)$ に対し

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_t : &= U_t \mathbf{T} U_t^\dagger \\ &=: Ad_t \mathbf{T} \end{aligned} \tag{776}$$

と置けば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{T}_t &= i\alpha^a U_t[T^a,\mathbf{T}]U_t^\dagger \\ &= i\alpha^a \mathcal{C}^a \mathbf{T}_t \end{aligned} \tag{777}$$

ここで $\mathcal{C}^a$ は

$$\mathcal{C}^a := i(f^{abc})_{bc} \tag{778}$$

で定義される行列である。従って

$$Ad_t = \exp\left( it\alpha^a \mathcal{C}^a \right) \tag{779}$$

を得る。この $\mathcal{C}^a$ も $T^a$ と同様のリー代数

$$[\mathcal{C}^a, \mathcal{C}^b] = if^{abc}\mathcal{C}^c \tag{780}$$

を満たす。この $\mathcal{C}^a$ による表現を随伴表現という。

最後にカシミール演算子と呼ばれる行列

$$T^2 := T^a T^a = \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \tag{781}$$

について。これも非可換ゲージ理論の計算でよく現れる。$T_t^2 := U_t T^2 U_t^\dagger$ と置けば

$$\begin{aligned} T_t^2 &= T_t^a T_t^a \\ &= \mathbf{T}_t^\dagger \mathbf{T}_t \\ &= \mathbf{T}^\dagger Ad_t^\dagger Ad_t \mathbf{T} \\ &= \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \\ &= T^2 \end{aligned} \tag{782}$$

を得る。言い換えれば $[T^a, T^2] = 0$ である。即ち $T^2$ は $\mathfrak{su}(N)$ の $SU(N)$ 不変行列である。従って $T^2$ は単位行列 1 に比例する。(772) で $a = b$ ととり全ての基底に対して和を取れば

$$NT^2 = N^2 - 1 \tag{783}$$

が得られる。即ち

$$T^2 = \frac{N^2-1}{N} \tag{784}$$

である。随伴表現のカシミール演算子

$$\mathcal{C}^2 := \mathcal{C}^a \mathcal{C}^a \tag{785}$$

も非可換ゲージ理論の計算において現れる。$\mathcal{C}^a = i(f^{abc})_{bc}$ より

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^2)_{ab} &= f^{acd} f^{bcd} \\ &= C\delta^{ab} \end{aligned} \tag{786}$$

の形になる。

## C.3　表現

一般に $N$ 次元ベクトル空間 $V$ が与えられた時、$V$ から $V$ 自身への線形写像全体からなる集合を $GL(V)$ と書き[18]、一般線形群と呼ぶ。従って $GL(V)$ の元は $n \times n$ 行列全体からなる集合ともいえる。ここである群 $G$ が $V$ に線形に作用するとすると、$a \in G$、$v \in V$ に対し、ある $A \in GL(V)$ が存在し

$$av = Av \tag{787}$$

と表すことが出来る。このような対応 $G \to GL(V)$ とベクトル空間 $V$ との組み合わせを $G$ の $V$ 上の表現という[19]。$SU(N)$ は $V$ への作用として通常の行列の $V$ への作用として定義できる。当然その表現は前節で考えたような $N \times N$ 行列として表現した通常通り定義した $SU(N)$ の表現と一致するので、このような表現を定義表現という。もちろん表現はこのような定義表現だけではない。例えば $SU(N)$ の生成子 $T^a$ に対し、行列 $-(T^a)^* = -(T^a)^t$ も (770) の関係式を満たす。従って生成子の表現が $-(T^a)^t$ であるようなベクトル空間を考えることも出来る。それを $\tilde{V}$ と書き、($-(T^a)^t$ により生成される群と合わせて）$V$ の複素共役表現という。当然ながら複素共役表現での $-(T^a)^t$ の固有値は定義表現でのそれのマイナス倍である。従って前々節と同様に固有ベクトルをその属する固有値によって $N-1$ 次元空間内の点と対応させれば、定義表現の場合と原点対称となる。

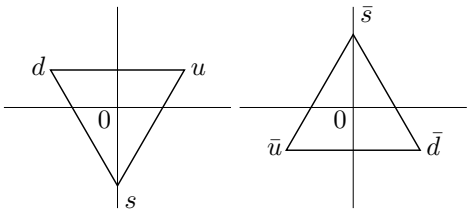
一般にベクトル空間と、それに作用する変換群 $G$ が与えられた時、その表現が群 $G$ の任意の元 $A$ に対し

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \tag{788}$$

の形になる時ベクトル空間はこの群 $G$ の変換により混じることのない 2 つの部分空間に分けられる。従って表現を考える時には、このような形に分けることの出来ないような部分空間に限定して考えればよい事がわかる。そのような時、表現は既約であるという。そうでない時、つまり分けられる時、可約であるという。

$SU(N)$ 群の作用するベクトル空間の表現の内、$N$ 次元ベクトル空間 $V$ はもちろん既約である。一般に $V$ のテンソル積で定義されるベクトル空間は可約である。しかし、証明は省くがヤング図に対応する対称性を持った元全体からなる集合（$V$ の部分空間となる）は既約表現である。

$SU(3)$ の場合には同時対角化される生成子は 2 個ある。従って同時固有ベクトルの各々（全部で 3 個ある）は 2 次元平面上の点で表される。前々節で説明したようにそれら 3 つの固有ベクトルを表す平面上の点は、それらの重心が原点にくるようになってなければいけない。ここでは慣習にならい



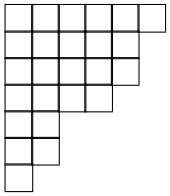

(789)

と置く。ここで左側の図は $SU(3)$ の定義表現、右側は複素共役表現に対応している。また $u, d, s$ は定義表現のその点に対応する固有ベクトルを表しており、$\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ は複素共役表現のその点に対応する固有ベクトルを表している[20]。これら固有ベクトルのテンソル積から既約表現を選び出すにはヤング図を用いるのが簡単である。ヤング図は以下のルールに基づいて作る。

まず正方形の箱を左から一列に並べる。二列目にも同じように左から箱を並べていくのであるが、一列目に並んだ箱の数以下にする。三列目はさらに二列目に並んだ箱の数以下にする。同様にある行に並べる箱の数はその上の

[18] これは $End(V)$ という書き方もある。
[19] $G$ が $V$ に線形に作用するという仮定により、この対応は群論でいう準同型である。
[20] ここで $u, d, s$ はクオークのフレーバー（アップ、ダウン、ストレンジ）を当てはめている。

行に並んだ箱の数以下にする（たとえば下図のようである）。



次にこの箱に以下の方法で番号を振っていく。まず一列目に左から右側へ順番に $1,2,3,\cdots$ と振っていき、一番右側まで番号を振ったら次に二列目に同じように左から右へ振っていく。次に三列目、四列目、$\cdots$ というふうに番号を全ての箱に振っていく。このようにして出来た図をヤング図という。次にこのヤング図に対して以下のような置換演算子を定義する。第 $i$ 行の箱の番号の入れ替えの置換群 $\pi_\alpha^{ri}$ に対し

$$S_i = \sum_\alpha \pi_\alpha^{ri} \tag{790}$$

（和は $i$ 行の箱の全ての可能な置換にわたる）と置き、$S = \prod_i S_i$ を定義する（積はヤング図の全ての行にわたる）。及び第 $j$ 列の箱の番号の入れ替えの置換群 $\pi_\alpha^{cj}$ に対し

$$A_j = \sum_\alpha \varepsilon_{\pi_\alpha^c} \pi_\alpha^{cj} \tag{791}$$

（和は $j$ 列の箱の全ての可能な置換にわたる）と置き、$A = \prod_j A_j$ を定義する（積はヤング図の全ての列にわたる）。また $\varepsilon_\pi$ は置換 $\pi$ が遇置換ならば $+1$、奇置換であるなら $-1$ である。この時ヤングの対称子は $Y = AS$ で定義される。例えばヤング図

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

に対応するヤング対称子は

$$Y = \Big(1 - (13)\Big)\Big(1 + (12)\Big) \tag{792}$$

となる[21]。

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \tag{793}$$

などは

$$Y = \Big(1 - (12) - (23) - (13) + (123) + (132)\Big) \tag{794}$$

となる。以上で定義したヤング対称子のベクトルへの作用を次のように定義する。$V$ の基底ベクトル $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_n}$（重複があってもよい）のテンソル積に対し、置換 $(i_a i_b)$ の作用を

$$(i_a i_b) \cdot v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_a} \otimes \cdots \otimes v_{i_b} \otimes \cdots = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_b} \otimes \cdots \otimes v_{i_a} \otimes \cdots \tag{795}$$

で定義する。後は全部で $n$ 個の箱からなるヤング図に対応するヤング対称子 $Y$ の作用の定義も自然に理解できると思う。この時 $V \otimes V \otimes \cdots \otimes V = \otimes_n V$ に $Y$ を作用させたもの $Y \cdot \otimes_n V$ は既約表現となっている。ここで

$$Y \cdot \otimes_n V = \{Y \cdot v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} \text{によって張られるベクトル空間} \,|v_i \text{は} V \text{の基底ベクトル}\,\} \tag{796}$$

[21] ここで置換は一般に $(abc\cdots d)$ と書いたときには $a$ を $b$ に、$b$ を $c$ に、$\cdots$ $d$ を $a$ に置き換える置換を表している。

である。テンソル積に対する群の作用は $U = e^{iA}$ が各 $v_i$ に作用する。即ち $v = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$ に対して

$$Uv = (Uv_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (Uv_{i_n}) \tag{797}$$

従って、生成子は

$$A \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes A \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes A \tag{798}$$

となる。従って上昇下降演算子 $E_{nm}$ のテンソル積上の表現もこのような形になる。このことを踏まえればまずヤング図の一行目の箱に対応するベクトル全てを $v_1$ にして、二行目に対応するベクトル全てを $v_2$ にして、一般に $i$ 行目に対応するベクトル全てを $v_i$ にして得られた $Y \cdot \otimes_n V$ の元に上昇下降演算子を作用させていけば、ヤング図に対応する表現の全ての $Y \cdot \otimes_n V$ の元が得られる。

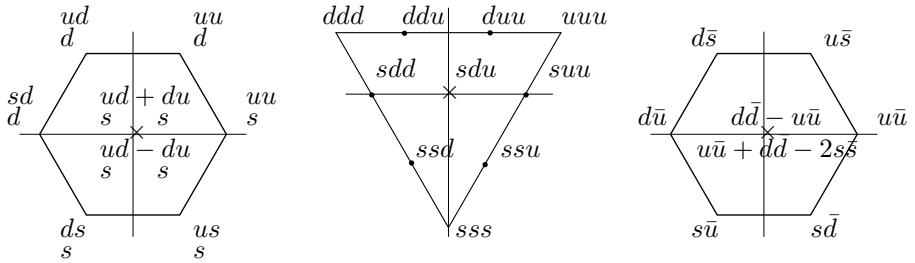
ここで $SU(3)$ を例にして見てみる。基底ベクトルをクオークの flavour と対応させて $v_1 = u, v_2 = d, v_3 = s$ と書くことにする。$SU(3)$ 行列の定義表現を規格化した形で書けば

$$\begin{aligned}
T^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
T^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^6 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\
T^7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{799}$$

である。対角行列 $T^3, T^6$ を見れば、対応するベクトルを平面上で表すと (789) の左側の図のようになることが分かる。複素共役表現は固有値が逆符号なので今度は (789) の右側の図のようになる。さてクオークモデルで重要なヤング図は

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad , \quad \square^* \times \square \tag{800}$$

の 3 つの図である。一番右側のヤング図は複素共役表現と定義表現のテンソル積を表している。ヤング図に対応する表現を (789) に習い、2 次元ベクトル空間内の固有値の組で座標を表すようにすれば、左側のヤング図から順に




(801)

となる。両端は八重項（octet）、真ん中は十重項（decuplet）という。octet の真ん中には 2 つの基底（$(ud + du)s$ と $(ud - du)s$）がくる。$u, d, s$ をヤング図に対応するように並べて書いている。ここでひとつ注意しておく。一般に $SU(N)$ の定義表現の $N-1$ 個の完全反対称なテンソル積（縦に $N-1$ 個箱を並べたヤング図に対応）は

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N} v_{i_2} \cdots v_{i_N} \tag{802}$$

となるが、$U \in SU(N)$ に対して $\det U = 1$ となるのでちょうど複素共役表現 $\square^*$ と等しくなる。

一般に $SU(N)$ に対して、ヤング図に対応する表現の次元は次のようにして計算することが出来る。ヤング図の任意の箱（箱 $i$ と呼んでおく）をひとつとって、その箱から右側へ端までずっと直線を引く。同様にその同じ箱から下へずっと直線を引く。そうやって出来た鍵型の線が通っている箱の数（箱 $i$ も含めて）を $d_i$ と置く。次にヤング図の一番左上隅の箱から見て、左に行けば $+1$ カウントしていき、下へいけば $-1$ でカウントしていった時の、箱 $i$ までの距離を $D_i$ と置く。その時

$$d = \prod_i \frac{N + D_i}{d_i} \tag{803}$$

がそのヤング図に対応する表現の次元になる。ここで積は全ての箱に対して取っている。例えば

(804)

に対しては

for $d_i$ for $D_i$

(805)

であるので $d = \frac{N(N+1)(N-1)}{3}$ がこの表現の次元となる。特に $N = 3$ の時は $d = 8$ となる。これは上の octet の場合とちょうど一致している。

次にテンソル積の既約分解の説明をする。2 つのヤング図 $A, B$ に対応する表現の直積から得られる既約表現は以下のルールに従い新しくヤング図を作っていったもので得ることが出来る。まずヤング図 $B$ の一行目の箱に全て $a$ の文字を振っていく。次に二行目には $b$ の文字を振っていく。三行目には $c$ を $\cdots$ と順番に各行の箱に文字を振っていく。次にヤング図 $A$ に、$B$ を構成する箱を次のルールに従い付け加えていき新しいヤング図を作っていく。

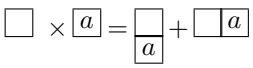
1)　同じ列には同じ文字を入れない。

2)　付け加えていった文字を一行目は右から左へ読んでいき、二行目は左から右へ読んでいき、三行目はまた右から左へと $\cdots$ という風に読んでいった時、どの時点においても $a$ の数が $b$ の数以上であり、$b$ の数が $c$ の数以上であり、$\cdots$ となっているように作っていく。

このようにして出来る新しいヤング図の全てのパターンがヤング図 $A, B$ の直積から得られる既約表現の全てを表している。

例をいくつか出してみる。

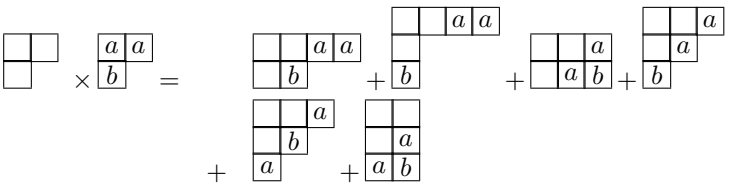
例 1)



(806)

これは $SU(3)$ であれば、$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{3}^* + \mathbf{6}$（数は次元を表している）と表現できる。ここで $\mathbf{3}^*$ は得られた 3 次元表現が複素共役表現に等しいことからそう書いている。

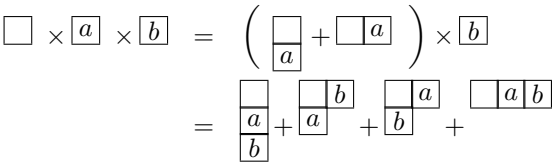
例 2)



(807)

などとなる。これは $SU(3)$ の場合には $\mathbf{8} \times \mathbf{8} = \mathbf{27} + \mathbf{10} + \mathbf{10}^* + \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{1}$ と表現できる。

例 3) 今度は 3 つの定義表現のテンソル積の場合。クオークモデルなどで必要な計算である。



(808)

これは $SU(3)$ の場合には $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{10}$ を意味している。クオークモデルにおいて、クオーク 3 つのテンソル積からはこれら singlet、octet、decuplet が得られるのが分かる。